Elektrotechnik I – WS 03/04
Prof. Dr.-Ing. W. Schwarz
Mitschrift

Fabian Kurz
http://fkurz.net/

Letzte Aktualisierung:
8. September 2004

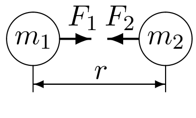
Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Physikalische Größen und Einheiten

- kennzeichnen physikalische Erscheinungen
- dienen zur quantitativen Beschreibung physikalischer Zusammenhänge
- **Grund-Basisgrößen**
  - Mechanik: Weg s, Zeit t, Masse m
  - Elektrotechnik: Ladung Q
- **Definitionsgleichungen**: definieren abgeleitete Größen aus Basisgrößen (subjektiv, aber zweckmäßig), *müssen gelernt werden!*
  - Geschwindigkeit: $v = \frac{s}{t}$
  - Energie: $W = Fs$
  - Widerstand: $R = \frac{U}{I}$
  - Leitwert: $G = \frac{I}{U}$
- **Naturgesetze**: geben objektive funktionelle Zusammenhänge physikalischer Größen an; werden durch Erkenntnis (Messen etc.) diktiert, *müssen verstanden werden!*

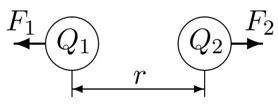
  Beispiele:

  $F = k_n \frac{m_1 m_2}{r^2}$

  Gravitationsgesetz

  Naturgesetz

  $F = k_{el} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$

  Coloumbsches Gesetz

  Naturgesetz

Struktur einer physikalischen Größe

$$\textbf{Größe} = \underbrace{\textbf{Zahlenwert}}_{\text{Quantität}} \quad * \quad \underbrace{\textbf{Maßeinheit}}_{\text{Qualität}}$$

Beispiel

$$s = 5 * 1\,\mathrm{m} = 5\,\mathrm{m}$$

Zahlenwert und Maßeinheit sind mathematische *Faktoren*. Daher sind Umformungen einer physikalischen Größe möglich:

$$s = 5 * 1\,\mathrm{m} \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{s}{1\,\mathrm{m}} = 5}_{s \text{ gemessen in m ist } 5} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{s}{5} = 1\,\mathrm{m}}_{s \text{ durch } 5 \text{ ergibt } 1\,\mathrm{m}}$$

Darstellungsformen physikalischer Gleichungen

Größengleichungen verbinden physikalische Größen

Beispiel: Wieviele Meter legt ein Kraftfahrzeug bei einer Geschwindigkeit von $120\frac{km}{h}$ in 3 Sekunden zurück?

$$s = vt = 120\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\,3\,\mathrm{s} = 120\frac{10^3\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}}\,3\,\mathrm{s} = 100\,\mathrm{m}$$

Kennzeichen: Es wird ein konkreter Wert einer physikalischen Größe bestimmt.

Zugeschnittene Größengleichungen

Beispiel: Gesucht ist der Weg s (in Metern), den ein Fahrzeug mit der Geschwindigkeit v (in $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$) in einer Zeit t (in Sekunden) zurücklegt.

$$s = vt = \frac{v}{\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\frac{t}{\mathrm{s}}\mathrm{s} = \frac{v}{\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}\frac{t}{\mathrm{s}}\frac{10^3\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}}\mathrm{s} = \frac{1}{3{,}6}\frac{v}{\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}\frac{t}{\mathrm{s}}$$

Dimension und Maßeinheiten

Die eckige Klammer $[X]$ gibt die Dimension der physikalischen Größe X an. Sie kann auch zur Angabe der Maßeinheit verwendet werden.

Beispiel: Beschleunigung a

$[a] = \frac{[s]}{[t]^2}$ Dimensionsangabe

$[a] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ Angabe einer Maßeinheit

Es gilt $[U] = \mathrm{V}$, aber $[\mathrm{V}]$ hat keinen Sinn.

Kapitel 1

Grundbegriffe

1.1 Ladung

Die Ladung ist die Grundgröße der Elektrotechnik. Sie dient zur Beschreibung von Kraftwirkungen, die mechanisch nicht erklärt werden können.

Eigenschaften:

- Es gibt positive und negative Ladungen
- Gleichnamige Ladungen stoßen einander ab, ungleiche Ladungen ziehen sich an
- Die Ladung ist *gequantelt*. Die kleinste bekannte Ladung ist die Elementarladung $e = 1{,}66 * 10^{-19}\mathrm{C}$. Eine beliebige Ladung kann nur ganzzahliges Vielfaches dieser Elementarladung sein. $Q = ne \quad n \in \mathbb{N}$
- Ladung ist stets an Ladungsträger gebunden (Ionen, Elektronen).
- Die Ladung ist eine *Erhaltungsgröße*. In einem abgeschlossenen Volumen V (ohne Wechselwirkung mit der Außenwelt) ist die Ladungsmenge konstant. Ladungen können innerhalb von V nur paarweise entstehen (Ladungstrennung, Generation) oder verschwinden (Rekombination).

1.2 Elektrischer Strom

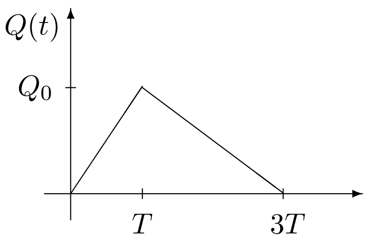
1.2.1 Definition

Strom (Fluß) ist gerichtete Bewegung einer Quantität. Elektrischer Strom ist die gerichtete Bewegung von Ladungen (Konvektionsstrom).

$$\boxed{I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\text{in } dt \text{ durch den Leiterquerschnitt bewegte Ladung}}{dt}}$$

$[I] = \frac{[Q]}{[t]} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{A}$ (Ampere) = Grund*einheit* der Elektrotechnik

Beispiel:



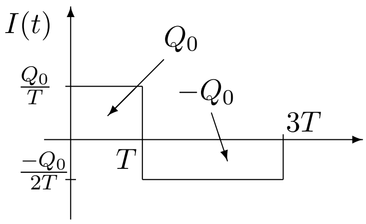
$Q(t)$: die bis t durch den Leiterquerschnitt geströmte Ladung

Gesucht: $I(t)$

1. Aufstellung der Beziehung für $Q(t)$:

$$Q(t) = \begin{cases} Q_0 \frac{t}{T} & 0 \leq t \leq T \\ Q_0 \frac{3T-t}{2T} & T \leq t \leq 3T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

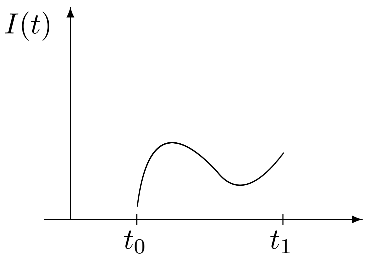
2. Bestimmung von $I(t)$:



$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \begin{cases} \frac{Q_0}{T} & 0 \leq t \leq T \\ -\frac{Q_0}{2T} & T \leq t \leq 3T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Umkehrung

$I(t)$ gegeben, $Q(t)$ gesucht



$\frac{dQ}{dt} = I(t)$ Differenzialgleichung

$$\int\limits_{Q(t_0)}^{Q(t_1)} = \int\limits_{t_0}^{t_1} I(t) dt$$

$$Q(t_1) - Q(t_0) = \Big[Q\Big]_{Q(t_0)}^{Q(t_1)} = \int\limits_{t_0}^{t_1} I(t)dt$$

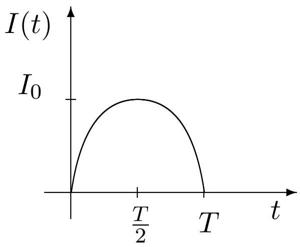
$$Q(t_1) = Q(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t_1} I(t)dt$$

Verallgemeinerung: Die Integrationsgrenze t_1 wird in t umbenannt, daher muß die Integrationsvariable in t' umbenannt werden.

$$Q(t) = Q(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} I(t')dt'$$

NB: $\int I(t)dt$ ist zur Beschreibung von Naturvorgängen nicht geeignet!

Beispiel: Parabelförmiger Stromimpuls



gesucht: $Q(t)$

$$I(t) = \begin{cases} a + bt + ct^2 & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zur Bestimmung der Gleichung für die Parabel werden 3 Punkte benötigt (3 Gleichungen, 3 Unbekannte).

$I(0) = 0 \Rightarrow a = 0$
$I(T) = 0 \Rightarrow 0 = bT + cT^2$
$I(\frac{T}{2}) = I_0 \Rightarrow I_0 = b\frac{T}{2} + c\frac{T^2}{4}$

$\Rightarrow b = -cT$
$\Rightarrow I_0 = -c\frac{T^2}{2} + c\frac{T^2}{4} = -c\frac{T^2}{4} \Rightarrow c = -\frac{4I_0}{T^2} \Rightarrow b = \frac{4I_0}{T}$

$\Rightarrow I(t) = 4I_0\left(\frac{t}{T} - (\frac{t}{T})^2\right)$

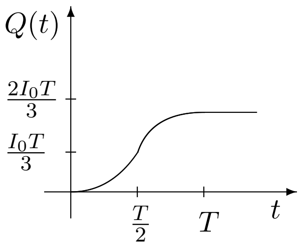
Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$\underbrace{Q(t) = Q(t_0) + \int_{t_0}^{t} I(t')dt'}_{t_0=0;\ Q(t_0)=Q(0)=0} = \int_{0}^{t} I(t')dt' = 4I_0 \int_{0}^{t} \left(\frac{t'}{T} - (\frac{t'^2}{T^2}) \right) dt'$$

$$= 4I_0 \left[\frac{t'^2}{2T} - \frac{t'^3}{3T^2} \right]_0^t = 4I_0 \left[\frac{t^2}{2T} - \frac{t^3}{3T^2} \right] = 4I_0T \left[\frac{t^2}{2T^2} - \frac{t^3}{3T^3} \right] \text{ (für } 0 \leq t \leq T)$$

Berechnung von $Q(0)$, $Q(\frac{T}{2})$ und $Q(T)$:

$$Q(0) = 0 \qquad Q\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{I_0T}{3} \qquad Q(T) = \frac{2I_0T}{3}$$



$Q(t) = \frac{2I_0T}{3}$ für $T \leq t$

1.2.2 Kennzeichen des Stroms

1. **Magnetische Wirkung:** Ein elektrischer Strom ist immer von einem Magnetfeld begleitet (Ampere'sches Gesetz)

nützlich	*störend*
Elektromagnet	Störfelder
Wellenausbreitung	Elektrosmog

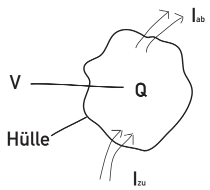
2. **Thermische Wirkung:** Ein Strom kann eine Erwärmung des Leiters bewirken.

nützlich	*störend*
elektrische Heizung	Leitungsverluste
elektrisches Schmelzen	

3. **Chemische Wirkung:** Ein Strom kann Stoffumwandlungen und Stofftransport bewirken.

nützlich	*störend*
Galvanotechnik	elektrokorrision
elektrolytische Verfahren	
Akkumulatoren	

1.2.3 Grundeigenschaft des Stromes: Kontinuität



Die Ladung Q in einem abgeschlossenem Volumen ist konstant.

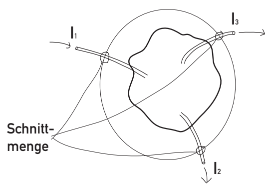
$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

Der Gesamtstrom durch eine geschlossene Hülle H ist Null.

$$I = I_{zu} - I_{ab} = 0$$

Der elektrische Strom verhält sich wie eine inkompressible Flüssigkeit.

Spezialfall: Strom in konzentrischen Leitern



$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

Summe der zufließenden Ströme

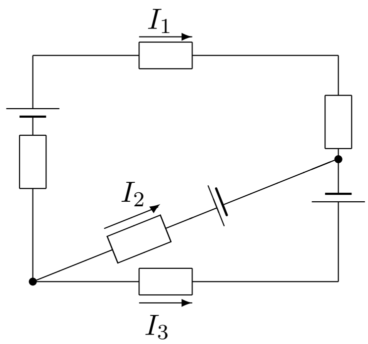
$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Summe der abfließenden Ströme

Die Gesamtsumme der in ein/aus einem geschlossenes Volumen hinein/herausfliessenden Ströme ist Null (Schnittmengengesetz der Netzwerktheorie).

Beispiele:

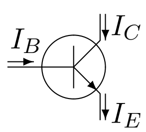
1. Elektrisches Netzwerk



$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$\longrightarrow$ Ein Strom ergibt sich jeweils aus den beiden anderen

2. Bipolartransistor:

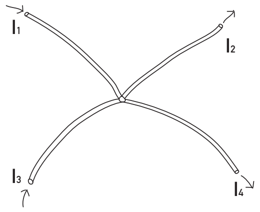


$$-I_B - I_c + I_E = 0$$

$$I_E = I_B + I_C$$

Kirchhoff'sches Stromgesetz (Knoten(punkt)-Satz)

(**K**irchhoffs **C**urrent **L**aw — KCL)



Hinfließender Strom:
$$\sum_m I_m = I_1 - I_2 + I_3 - I_4$$
Abfließender Strom:
$$\sum_n I_n = -I_1 + I_2 - I_3 + I_4$$

Die Gesamtsumme aller dem/vom Knoten zu-/weg-fließenden Ströme ist Null.

1.2.4 Messung des Stromes

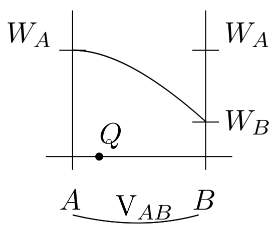
Grundregel: Strom wird immer durch einen Querschnitt gemessen.

$\Rightarrow$ Punkt im elektrischen Netzwerk

1. Durch Magnetfeledmessung
   (a) Kraftwirkungen (z.B. Drehspul-/Dreheiseninstrument)
   (b) Messung der magnetischen Flußdichte
2. Strommessung durch Messung des Spannungsabfalls an einem Messwiderstand
3. Auswertung der Wärmeentwicklung
   (a) Hitzdraht-Messwerk
   (b) Bimetall-Messwerk
4. Auswertung der chemischen Wirkung historisch $\rightarrow$ die Ampere-Definition

1.3 Elektrische Spannung

1.3.1 Definition



Ladungstransport ist mit Energietransport verbunden. Ladungsträger sind Energieträger.

$$U_{AB} = \frac{W_A - W_B}{Q}$$

$\Rightarrow$ Definition der elektrischen Spannung

Spannungsrichtung: vom höheren (+) zum niedrigeren (−) Energieniveau

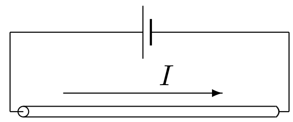
$[U] = \frac{[W]}{[Q]} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{Ws}}{\mathrm{As}} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{A}} = 1\,\mathrm{V}$ (Volt)

Prof. Dr.–Ing. W. Schwarz: *"Für Plus wird die Farbe blau häufig* (malt ein rotes Plus) *und für Minus die Farbe 'Minus' verwendet."*

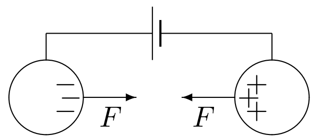
1.3.2 Kennzeichen der Spannung

allgemein: Spannung kennzeichnet die Tendenz zum Ladungsausgleich.

Stromantrieb: Eine an einen Leiter angelegte Spannung treibt einen Strom durch den Leiter.



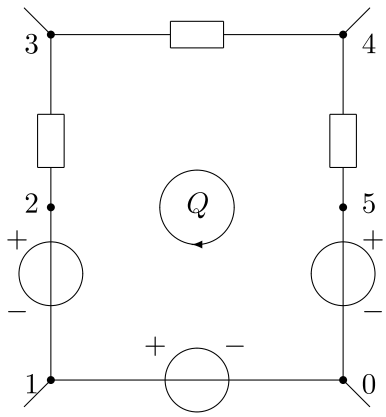
Mechanische Kräfte: Isolierte Leiter, zwischen denen eine Spannung liegt ziehen einander an.



Erzeugung:

1. Grenzschichteffekte
   (a) Metall – Elektrolyt (z.B. Batterien)
   (b) Metall – Metall (z.B. Thermoelemente)
   (c) Halbleiter – Halbleiter (Photodiode)
2. Induktionswirkung ⇒ Generatoren

1.3.3 Grundeigenschaften der Spannung



Masche: geschlossener Umlauf in einem elektrischen Netzwerk. Eine Ladung Q läuft auf dem Weg $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 0$. Sie hat im Zielpunkt 0 die gleiche Energie wie beim Start.

$$W_{\circlearrowleft} = W_{01} + W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{45} + W_{50} = 0$$

$$\frac{W_{\circlearrowleft}}{Q} = \frac{W_{01}}{Q} + \frac{W_{12}}{Q} + \frac{W_{23}}{Q} + \frac{W_{34}}{Q} + \frac{W_{45}}{Q} + \frac{W_{50}}{Q} = 0$$

$$U_{\circlearrowleft} = U_{01} + U_{12} + U_{23} + U_{34} + U_{45} + U_{50} = 0$$

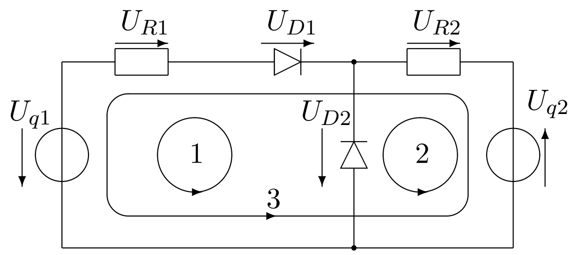
Kirchhoff'sches Spannungsgesetz (Maschensatz)

(***K**irchhoff's **V**oltage **L**aw*)

Bei Umlauf in einer Masche ist die Summe aller in Umlaufrichtung gezählter Spannungen Null.

$$\sum_{\circlearrowleft} U_\nu = 0$$

Beispiele und Anwendungen



$\circlearrowleft 1: \; -U_{D1} - U_{R1} + U_{q1} - U_{D2} = 0$

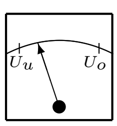
$\circlearrowleft 2: \; U_{D2} + U_{q2} - U_{R2} = 0$

$\circlearrowleft 3: \; -U_{D1} - U_{R1} + U_{q1} + U_{q2} - U_{R2} = 0$

$\circlearrowleft 3 = \circlearrowleft 1 + \circlearrowleft 2$

$\Rightarrow$ Nur zwei Maschengleichungen sind voneinander abhängig!

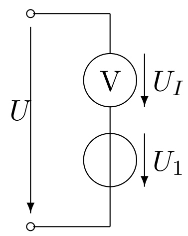
Problem: Möglichst genaue Messung von Spannungen in einem engen Bereich $U_u < U < U_o$.



$$-U + U_I + U_1 = 0$$

$$U_I = U_u - U_1$$

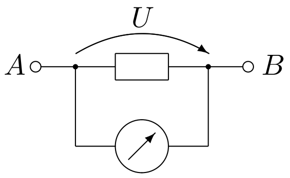
$$0 = U_u - U_1 \Rightarrow \underline{U_u = U_1}$$



1.3.4 Messung der Spannung

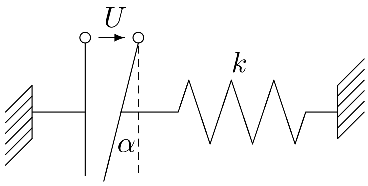
Spannung wird zwischen zwei Punkten gemessen.

1. Durch Auswertung des Stromantriebs (Kraftwirkung im magnetischen Feld). (Stromführender Spannungsmesser)



Anzeige I_m

2. Durch Auswertung der Kraftwirkung im elektrischen Feld



$$F = k\alpha = f(\alpha)$$

$$\alpha = f(U)/k$$

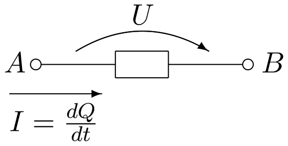
1.4 Energie und Leistung

Mechanik:

$$W = Fs = \int_{s_1}^{s_2} F(s)ds \qquad [W] = \mathrm{Nm} = \mathrm{J} \quad \text{(Joule)}$$

$$P = \frac{dW}{dt} \qquad [P] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \mathrm{W} \quad \text{(Watt)}$$

1.4.1 Grundbeziehungen



$$U = \frac{W}{Q} \rightarrow \boxed{W = Q\,U}$$

$W = Q\,U$ gilt, wenn sich die Spannung nicht ändert

Beispiel: KFZ-Akku (12V, 56 Ah). Gespeicherte Energie:

$W = QU = 56\,\text{Ah} * 12\,\text{V} = 56 * 3600\,\text{As} * 12\,\text{V} = 2419200\,\text{Ws}$
$W = 2{,}42\,\text{MWs}$

Wieviele l Wasser können damit von 20°C auf 100°C erhitzt werden?

Spezifisches Wärmeäquivalent für Wasser:

$$w_w = \frac{W_w}{m\vartheta} = 4{,}19\,\frac{\text{kWs}}{\text{kg}\,\text{K}} \qquad (1\text{ kcal})$$

$$m = \frac{W_w}{w_w\vartheta} = \frac{W_{Akku}}{w_w\vartheta} = \frac{2{,}42\,\text{MWs}\,\text{kg}\,\text{K}}{4{,}19\,\text{kWs}\,80\,\text{K}} = 7{,}2\,\text{kg}$$

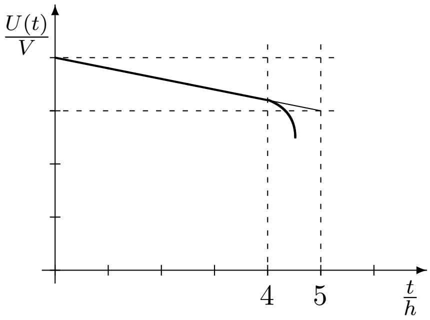
Allgemeiner Fall: Spannung ändert sich

$$dW = U\,dQ \Longrightarrow \frac{dW}{dt} = P = U\,\frac{dQ}{dt} = UI = P\,dt$$

$$\int\limits_{W(t_0)}^{W(t)} dW = \int\limits_{t_0}^{t} P(t')\,dt' \longrightarrow W(t) - W(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} P(t')\,dt'$$

$$W(t) = W(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} P(t')\,dt' \qquad P(t') = U(t')\,I(t')$$

Beispiel: Entladekurve des Lithium-Ionen-Akkus ($I_0 = 100\,\text{mA}$)



Gesucht: $W(t): \quad 0 \le t \le 4\text{h}$

$P(t) = U(t)\,I(t) = I_0(U_0 - at)$

$U(t) = U_0 - at$ und $I(t) = I_0$

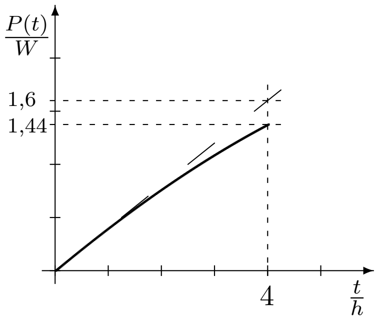
$U_0 = 4\,\text{V},\ a = \frac{1\,\text{V}}{5\,\text{h}} = 0{,}2\,\frac{\text{V}}{\text{h}}$

$t_0 = 0; W(t_0) = 0$

$$W(t) = \int\limits_0^t P(t')\,dt' = I_0 \int\limits_0^t (U_0 - at')\,dt' = I_0 \Big[U_0\,t' - \frac{a}{2}t'^2\Big]_0^t$$

$$= I_0\left(U\,t - \frac{a}{2}\,t^2\right) = 0{,}4\,\mathrm{Wh}\left(\frac{t}{h}\right) - 0{,}01\frac{\mathrm{Wh}}{\mathrm{h}}\left(\frac{t^2}{\mathrm{h}}\right)$$

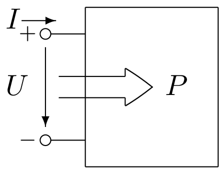
$$\frac{W(t)}{\mathrm{Wh}} = 0{,}4\left(\frac{t}{\mathrm{h}}\right) - 0{,}01\left(\frac{t}{\mathrm{h}}\right)^2$$

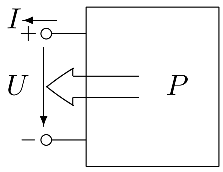


$W(4\mathrm{h}) = 1{,}6\,\mathrm{Wh} - 0{,}16\,\mathrm{Wh} = 1{,}44\,\mathrm{Wh}$

Gestrichelte Linie: Energieverlauf bei konstanter Spannung

1.4.2 Leistungsumsatz



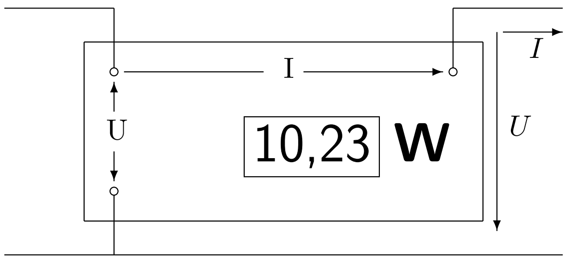


- U und I sind gleichsinnig
- I von + nach -
- Elektrische Leistung $P = UI$ wird in nichtelektrische Leistung umgewandelt

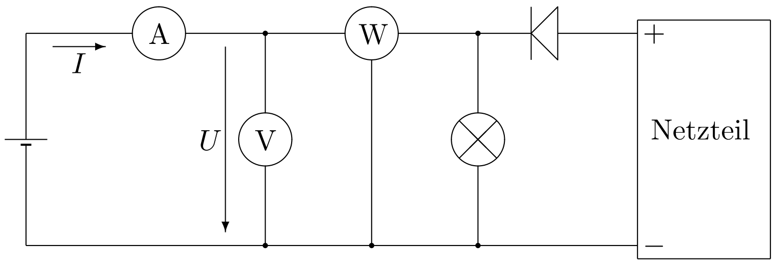
- U und I sind gegensinnig
- I von - nach +
- Nichtelektrische Leistung wird in elektrische Leistung umgewandelt

1.4.3 Messung der elektrischen Leistung

Ein Leistungsmesser muß gleichzeitig in den Stromkreis geschaltet und an der Spannungsquelle angeschlossen werden.



Experiment zum Leistungsumsatz



Netzgerät ausgeschaltet: Batterie liefert eine Leistung von 10 W, die Glühbirne leuchtet

Netzteil angeschaltet: Mit steigendem Strom sinkt die von der Batterie abgegebene Leistung, ab einer bestimmten Stromstärke nimmt die Leistung einen negativen Wert an, d.h. die Batterie wird geladen. Die Helligkeit der Glühbirne bleibt unverändert.

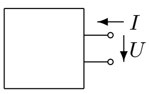
1.5 Die Elektrischen Grundgrößen

$$\begin{tikzcd}
\text{Ladung } Q \arrow[r] \arrow[d] & \text{Spannung } U = \frac{W}{Q} \arrow[dd] & \text{Energie } W \arrow[l] \arrow[d] \\
\text{el. Strom } I = \frac{dQ}{dt} \arrow[dr] & & \text{Leistung } P = \frac{dW}{dt} \arrow[dl] \\
& \text{el. Leistung } P = U\,I &
\end{tikzcd}$$

Kapitel 2

Resistive Zweipole

2.1 Grundbegriffe



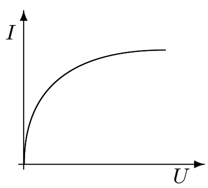
Zweipol (Eintor, Oneport):
Abgeschlossenes elektrisches Objekt mit zwei Anschlußstellen (Klemmen).

Bei einem *resisitven* Zweipol besteht zu jedem Zeitpunkt der gleiche U-I–Zusammenhang.

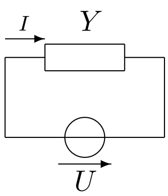
Das *Klemmenverhalten* eines resistiven Zweipols: Zusammenhang von Strom und Spannung wird durch die *U-I–Relation* beschrieben.

$f(U, I) = 0$ graphische Darstellung: Kennlinie

$\boxed{I = Y(U)}$

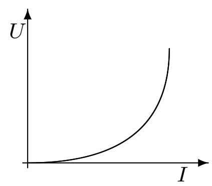


U-I–Kennlinie

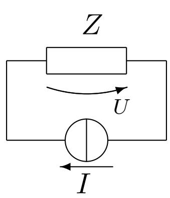


Spannung U treibt einen Strom durch den Zweipol

$\boxed{U = Z(I)}$

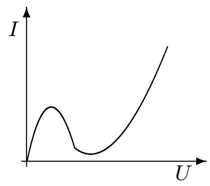


I-U–Kennlinie

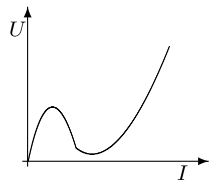


Strom I erzeugt Spannung U

Die beiden Funktionen Y und Z müssen nicht existieren!

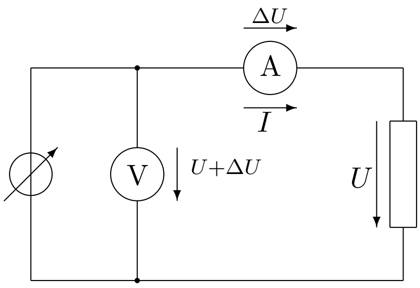


z.B.: Tunneldiode: U ist keine Funktion von I

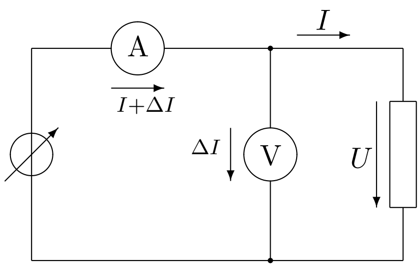


z.B.: Lichtbogen: I ist keine Funktion von U

2.1.1 Messung (Aufnahme) der Kennlinie

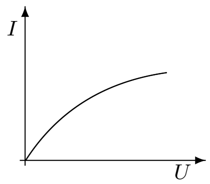


Stromrichtig

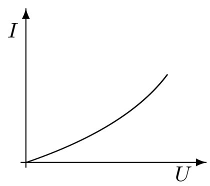


Spannungsrichtig

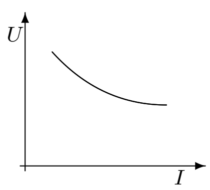
2.1.2 Beispiele



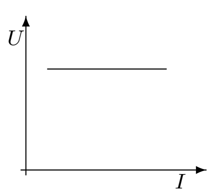
Glühbirne
Metallfadenlampe



Kohlefadenlampe
(Halbleiter)



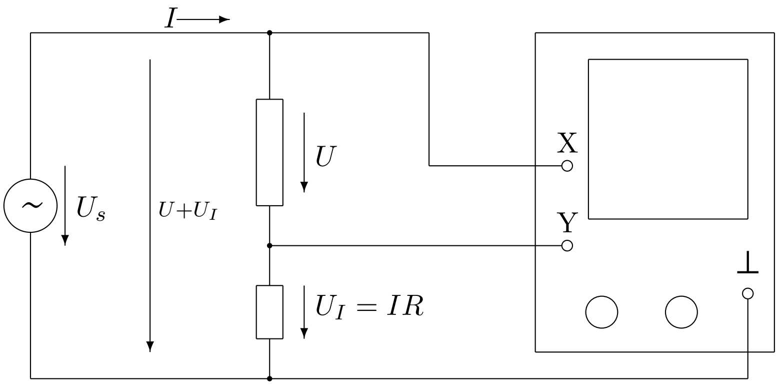
Hg-Lampe



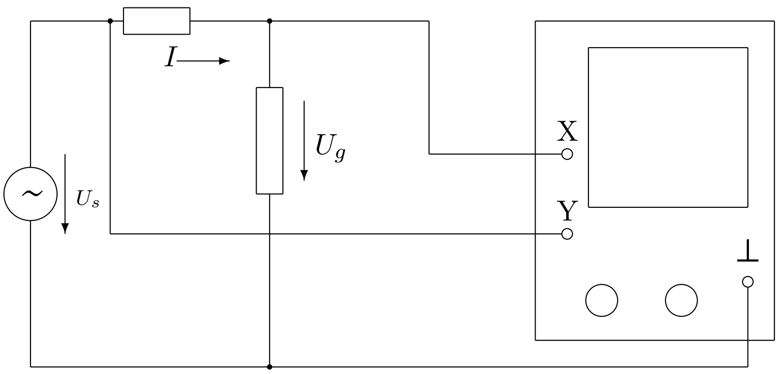
Glimm-Stabilisator

2.1.3 Kennlinienaufnahme mit dem Oszilloskop

Stromrichtig (Bedingung: $U_I \ll U$)

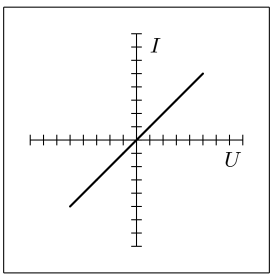


Spannungsrichtig (Bedingung: $U_g \gg U$)

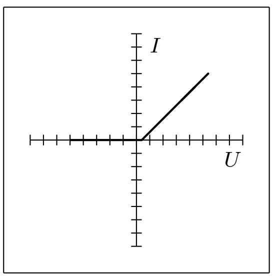


$$I = \frac{U_g - U}{R_I} = \frac{U_g}{R_I} \quad (\text{für } U_g \gg U)$$

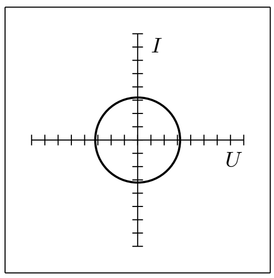
Beispielaufnahmen



Widerstand



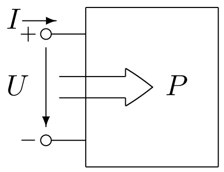
Diode



Kondensator
$\Rightarrow$ keine Kennlinie!

2.2 Leistung am Zweipol

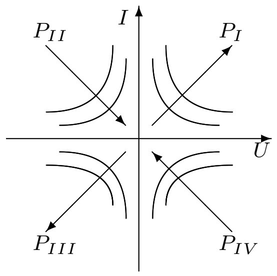
2.2.1 Leistungsumsatz



$P = UI$: in den Zweipol hineinströmende Leistung

Linien gleicher Leistung

$$P = UI = \text{konstant} \qquad I = \frac{P}{U}$$



Leistungshyperbeln

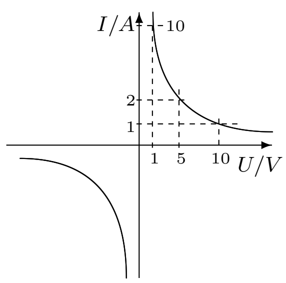
$P_{I,III}$: Zweipol nimmt Leistung auf (Verbraucher)

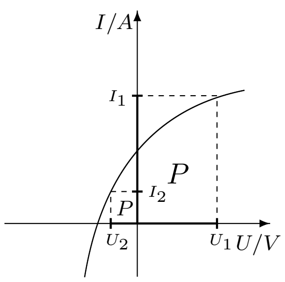
$P_{II,IV}$: Zweipol gibt Leistung ab (Erzeuger)

Beispiele:

Ein Zweipol nimmt ständig eine Leistung von 10 W auf. Wie sieht seine Kennlinie aus?

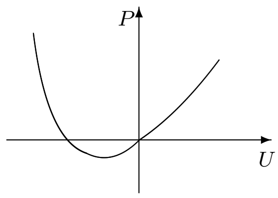
Alle Punkte U/I der Leistungshyperbel haben das Produkt $P = 10\text{W}$



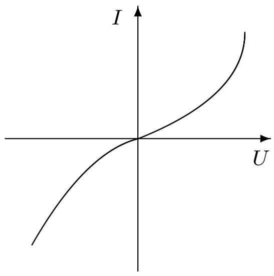


Im U–I–Diagramm stellen wir Ströme und Spannungen als Strecken, Leistungen als Flächen dar.

Verlauf der Leistung in Abhängigkeit der Spannung U. Oberhalb der U–Achse: Verbraucher, unterhalb der U–Achse: Erzeuger

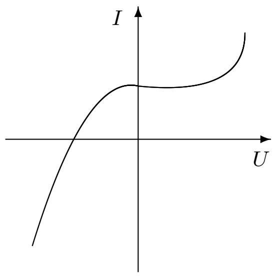


2.2.2 Aktive und passive Zweipole

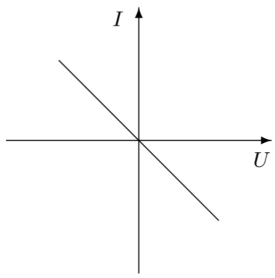


passiver Zweipol: nimmt immer Leistung auf. Kennlinie liegt ausschliesslich im ersten und dritten Quadranten (und muß durch den Ursprung gehen).

aktiver Zweipol: kann Leistung liefern. Kennlinie verläuft ganz oder teilweise im zweiten und/oder vierten Quadranten



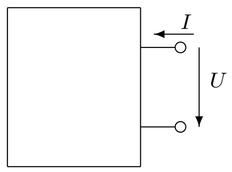
Beispiel: Wie sieht die Kennlinie eines Zweipols aus, der immer Leistung liefert? („negativer Widerstand“)



2.2.3 Zählpfeilsystem

nach DIN 5489

Verbraucher-Zählpfeilsystem



Aufgenommene Leistung

$$P_{auf} = UI$$

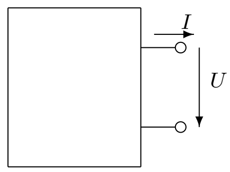
$P > 0 \Rightarrow$ Verbraucher
$P < 0 \Rightarrow$ Erzeuger

Abgegebene Leistung

$$P_{ab} = -UI$$

Verbraucht Leistung im ersten und dritten Quadranten, erzeugt Leistung im zweiten und vierten Quadranten.

Erzeuger-Zählpfeilsystem



Aufgenommene Leistung

$$P_{auf} = -UI$$

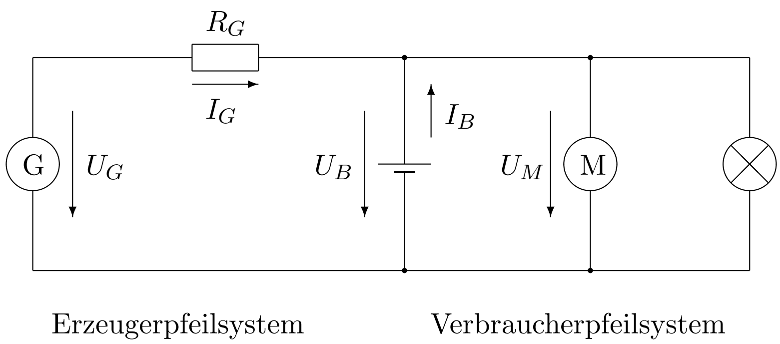
$P > 0 \Rightarrow$ Verbraucher
$P < 0 \Rightarrow$ Erzeuger

Abgegebene Leistung

$$P_{ab} = UI$$

Erzeugt Leistung im ersten und dritten Quadranten, verbraucht Leistung im zweiten und vierten Quadranten.

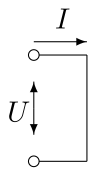
Beispiel für das Zählpfeilsystem: KFZ-Bordnetz



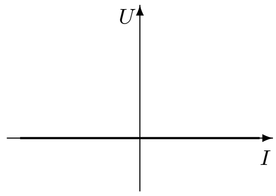
Erzeugerpfeilsystem Verbraucherpfeilsystem

2.3 Strom– und Spannungsquellen

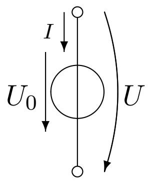
2.3.1 Kurzschluss



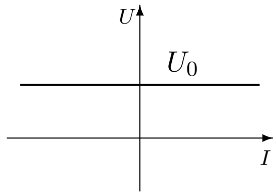
$$U = Z(I) \equiv 0$$
$$I = Y(U) \text{ existiert nicht!}$$



2.3.2 Spannungsquelle

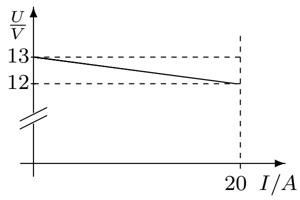


$$U = Z(I) = U_0$$
$$I = Y(U) \text{ existiert nicht!}$$



$\Rightarrow$ Kurzschluss: Spezialfall der Spannungsquelle

Beispiel einer Spannungsquelle: Autobatterie (nicht ideal, da $R_i > 0$)

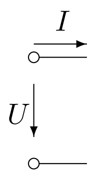


$$U_0 = 13\,\mathrm{V}$$

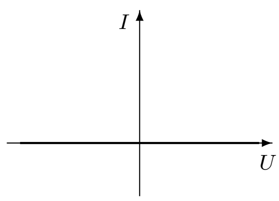
$$R_i = \frac{1\,\mathrm{V}}{20\,\mathrm{A}} = 50\,\mathrm{m\Omega}$$

$$I_i = \frac{U_i}{R_i} = 260\,\mathrm{A}$$

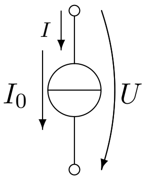
2.3.3 Leerlauf



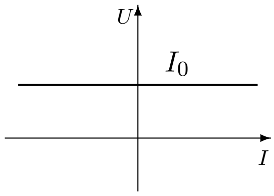
$$I = Y(U) = 0$$
$$U = Z(I) \text{ existiert nicht!}$$



2.3.4 Stromquelle

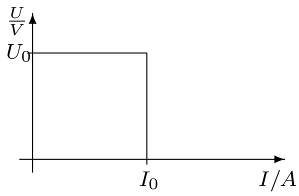


$I = Y(U) = I_0$
$U = Z(I)$ existiert nicht!



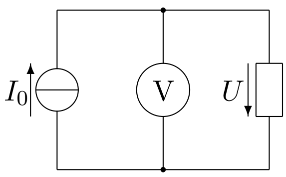
2.3.5 Anwendungen

Labornetzgerät:



Bis $I < I_0$ verhält sich das Labornetzteil wie eine ideale Spannungsquelle, bei I_0 tritt die Strombegrenzung in Kraft und das Netzteil verhält sich wie eine Stromquelle.

Direktanzeigender Widerstandsmesser:



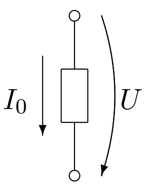
Durch den konstanten Strom entsteht eine proportionale Abhängigkeit von U und R.

$$U = RI \qquad I_0 \Rightarrow U \sim R$$

Daher kann der Widerstand am (auf Ohm geeichten) Voltmeter direkt abgelesen werden.

2.4 Der linear resistive Zweipol (Widerstand, Resistor)

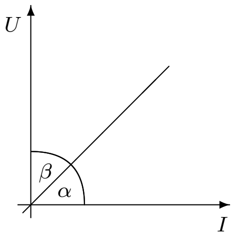
2.4.1 Ohmsches Gesetz



Bei einem Widerstand sind Strom und Spannung proportional.

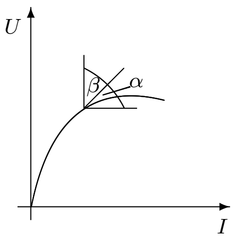
$\boxed{U \sim I}$ Ohmsches Gesetz

2.4.2 Widerstand und Leitwert (Definitionsgleichungen)



Widerstand (Resistance)	**Leitwert** (Conductance)
$R = \dfrac{U}{I} \sim \tan\alpha$	$G = \dfrac{I}{U} \sim \tan\beta$

Bei nichtlinearen Zweipolen



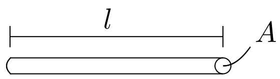
differenzieller Widerstand	**differenzieller Leitwert**
$r = \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}I} \sim \tan\alpha$	$g = \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}U} \sim \tan\beta$

Maßeinheiten

$$[R] = [r] = \frac{[U]}{[I]} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = 1\Omega \text{ (Ohm)}$$

$$\begin{aligned}[G] = [g] = \frac{[I]}{[U]} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}} &= 1\mathrm{S} \text{ (Siemens)} \\ &= 1\mho \text{ (Mho)}\end{aligned}$$

2.4.3 Bemessungsgleichungen



experimentell: $R \sim l, \quad R \sim \frac{1}{A}$

$R = \varrho \dfrac{l}{A}$	$R = \dfrac{l}{\kappa A}$
ϱ : spezifischer Widerstand	$\kappa = \frac{1}{\varrho}$: Leitwert

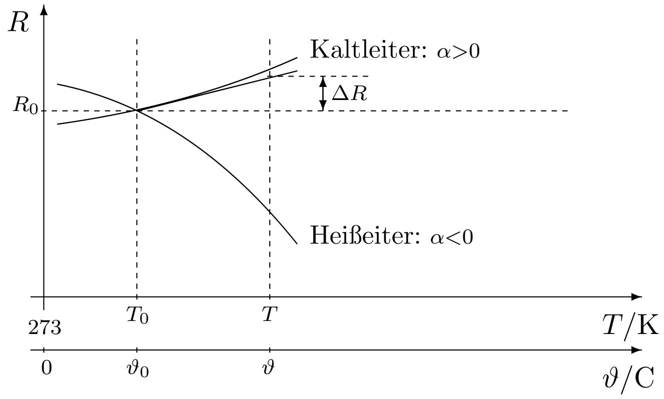
$$[\varrho] = \frac{[R][A]}{[l]} = \frac{[R][l][l]}{[l]} = [R][l] = \Omega\mathrm{m}$$

analog: $[\kappa] = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$
auch üblich:

$$[\varrho] = \frac{\Omega\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}} = 10^{-9}\,\Omega\mathrm{m} \qquad [\kappa] = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{cm}} = 100\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$$

2.4.4 Temperaturabhängigkeit

Die Temperaturabhängigkeit ist durch die Änderung von ϱ begründet.



Bezugstemperatur: $T_0 = 293\,\mathrm{K} \Rightarrow \vartheta_0 = 20°\,\mathrm{C}$
Celsius–Skala: $\vartheta/°\mathrm{C} = T/\mathrm{K} - 273$

Tangente im Punkt T_0, R_0

$$R(T) = \underbrace{R(T_0)}_{R_0} + \underbrace{\left.\frac{dR}{dT}\right|_{T_0} (T - T_0)}_{\Delta R}$$

T_0 : Bezugstemperatur
R_0 : Widerstand bei T_0

$$R(T) = R_0 + \Delta R \qquad R_0 = R(T_0) \quad \Delta R = \left.\frac{dR}{dT}\right|_{T_0} \Delta T$$

$$R(T) = R_0\left(1 + \frac{\Delta R}{R_0}\right) = R_0\left(1 + \underbrace{\frac{1}{R_0}\frac{dR}{dT}}_{\text{konst. } \alpha} \Delta T\right)$$

Temperaturkoeffizient

$$\alpha = \left.\frac{\frac{dR}{R_0}}{dT}\right|_{T_0} = \frac{\text{rel. Widerstandsänderung bei Temperaturänderung } dT}{dT}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R = R_0(1 + \alpha\Delta T)} \qquad [\alpha] = \frac{1}{\mathrm{K}}$$

Temperaturkoeffizient des Leitwertes

$$G = G_0(1+\alpha_G \Delta T) = \frac{1}{R_0(1+\alpha\Delta T)} \approx \underbrace{\frac{1}{R_0}}_{G_0}(1+\alpha\Delta T)^{-1}$$

Approximation von x^n	
$x^n \approx 1 + n(x-1)$	für $\lvert x-1\rvert \ll 1$
$x = 1+\varepsilon$	
$(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$	für $\lvert\varepsilon\rvert \ll 1$

$$G \approx G_0(1-\alpha\Delta T) \qquad \frac{1}{1+\varepsilon} = (1+\varepsilon)^{-1} \approx 1-\varepsilon$$

$$\boxed{\alpha \approx -\alpha_R}$$

$$\alpha = \frac{1}{R_0}\frac{dR}{dT}\bigg|_{T_0} = \frac{1}{\varrho_0 \frac{l}{A}} \frac{d\left(\varrho_0 \frac{l}{A}\right)}{dT}\Bigg|_{T_0} = \underbrace{\frac{1}{\varrho_0}\frac{d\varrho}{dT}\bigg|_{T_0}}_{\text{Temp.koeff. d. spez. Widerstandes}}$$

Beispiel

Metalle $\quad \varrho(T) = \varrho_M\left(\frac{T}{\theta} - a\right)$

$a \approx 0{,}15$ (linear über sehr weite Temperaturbereiche)

θ Debye-Temperatur
z.B. Cu = 333 K, Al = 393 K, Ag=215 K

$$\alpha = \frac{1}{\varrho(T_0)}\frac{d\varrho(t)}{dt}\bigg|_{T_0} = \frac{1}{\varrho_m\left(\frac{T_0}{\theta} - a\right)}\frac{\varrho_m}{\theta} = \frac{1}{T_0 - a\theta}$$

Cu bei 293 K: $\quad \theta = 333\,\mathrm{K} \quad \rightarrow \quad \alpha_{20} = \frac{1}{293\,\mathrm{K} - 0{,}15 * 333\,\mathrm{K}} = 4 * 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$

2.4.5 Experiment: Temperaturabhängigkeit des Widerstandes

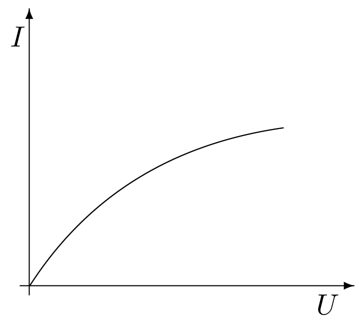
Beispiel 1

Der Widerstand einer Kupferspule, einer Konstantanspule, eines Heißleiters sowie eines Kaltleiters wird jeweils bei Umgebungstemperatur $\vartheta_1 = 20°\mathrm{C}$ und bei $\vartheta_2 = 97°\mathrm{C}$ gemessen.

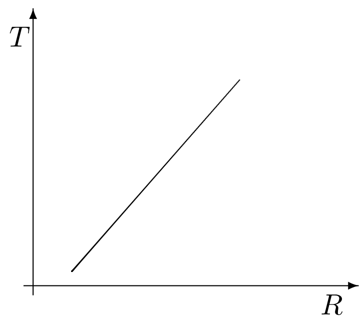
Die Meßergebnisse sind tabellarisch dargestellt. Da beim Heiß–/Kaltleiter kein linearer Zusammenhang zwischen der Temperatur und dem Widerstand besteht kann hier kein α angegeben werden.

Material/Werte	$R(\vartheta_1)$	$R(\vartheta_2)$	ΔR	$\alpha\ (= \frac{\Delta R}{R_0 \Delta T})$
Kupfer	$9{,}73\,\Omega$	$12{,}52\,\Omega$	$2{,}79\,\Omega$	$0{,}0037\,\mathrm{K}^{-1}$
Konstantan	$16{,}56\,\Omega$	$16{,}36\,\Omega$	$0{,}20\,\Omega$	$-0{,}00013\,\mathrm{K}^{-1}$
Heißleiter	$25{,}00\,\Omega$	$4{,}10\,\Omega$	$20{,}90\,\Omega$	—
Kaltleiter	$100{,}00\,\Omega$	$876{,}00\,\Omega$	$776{,}00\,\Omega$	—

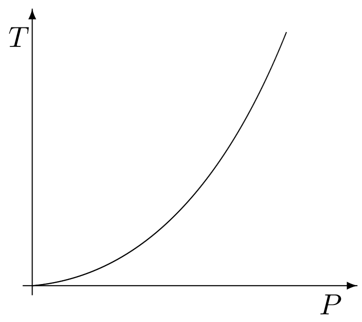
Beispiel 2: Halogenlampe (24 V, 100 W)



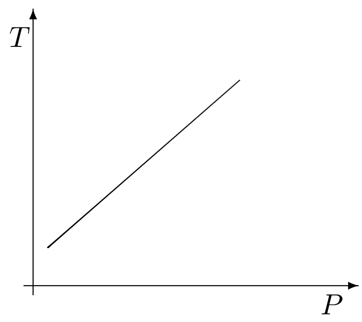
U–I–Kennlinie



Widerstand als Funktion der Temperatur



Leistung als Funktion der Temperatur (linearer Maßstab)

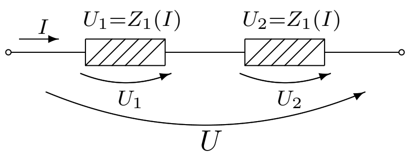


Leistung als Funktion der Temperatur (Doppeltlogarithmischer Maßstab) $\Rightarrow$ Wärmestrahlung

2.5 Schaltungen mit Zweipolen

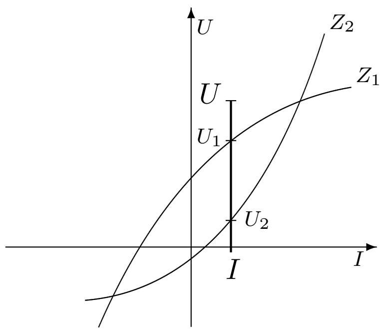
2.5.1 Grundschaltungen

Serienschaltung



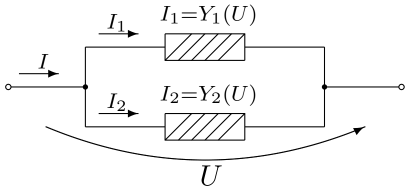
$$U = U_1 + U_2$$

$$U = Z(I) = Z_1(I) + Z_2(I)$$



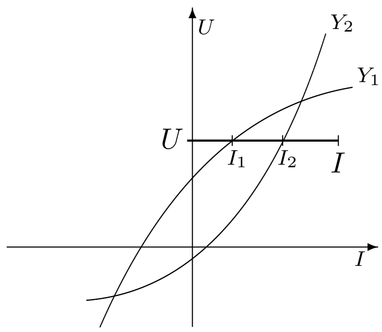
Addition der Spannungswerte bei jeweils gleichen Stromwerten.

Parallelschaltung



$$I = I_1 + I_2$$

$$I = Y(U) = Y_1(U) + Y_2(U)$$



Addition der Stromwerte bei jeweils gleichen Spannungswerten.

Widerstand / Leitwert

$$U = U_1 + U_2$$

$$\frac{U}{I} = \frac{U_1}{I} + \frac{U_2}{I}$$

$$R = R_1 + R_2$$

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}$$

$$I = I_1 + I_2$$

$$\frac{I}{U} = \frac{I_1}{U} + \frac{I_2}{U}$$

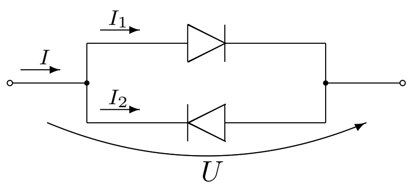
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$G = G_1 + G_2$$

Das selbe gilt für den differentiellen Widerstand und Leitwert.

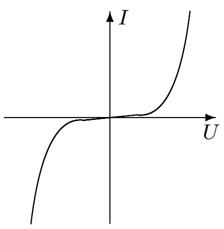
Beispiele und Anwendungen

1. Antiparallele Dioden



$$I_D = I_S\left(e^{\frac{U_D}{U_T}} - 1\right)$$

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 = I_S\left(e^{\frac{U}{U_T}} - 1\right) - I_S\left(e^{\frac{-U}{U_T}} - 1\right) \\ &= I_S\left(e^{\frac{U}{U_T}} - e^{\frac{-U}{U_T}}\right) \\ &= 2 * I_s * \sinh\frac{U}{U_T} \\ &\quad (\text{da } \frac{e^x - x^{-x}}{2} = \sinh x) \end{aligned}$$

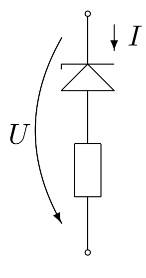


U–I–Kennlinie zweier antiparalleler Dioden.

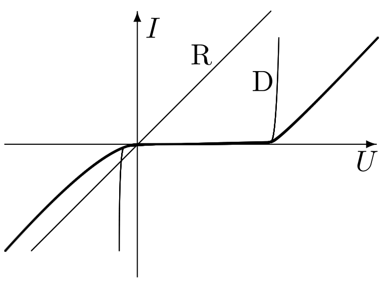
Praktische Anwendung: Spannungsbegrenzung.

2.5.2 Scherung von Kennlinien

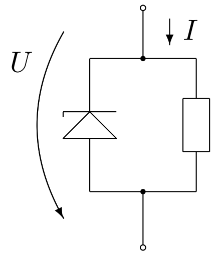
Z–Diode und Widerstand in Serienschaltung



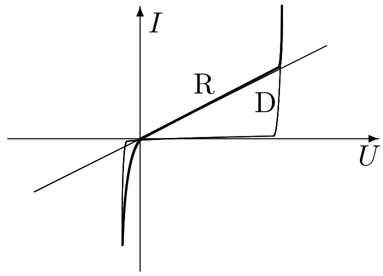
Gemeinsame Kennlinie: Addition der Spannungen



Z–Diode und Widerstand
in Parallelschaltung

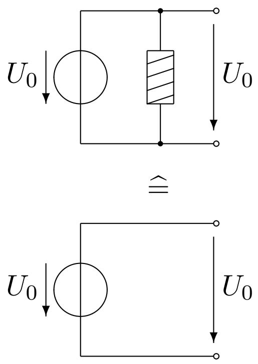


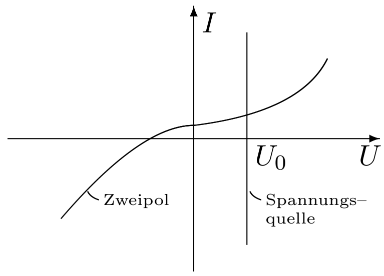
Gemeinsame Kennlinie:
Addition der Ströme



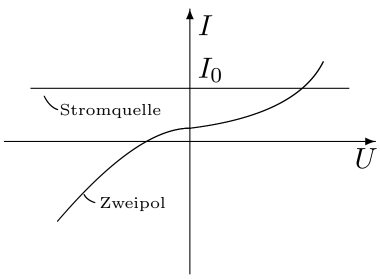
2.5.3 Schaltungen mit Strom– und Spannungsquellen

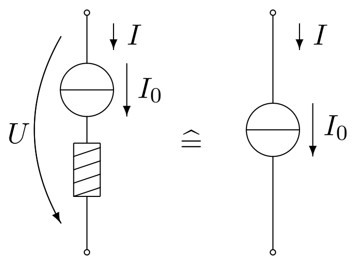
Spannungsquelle: Bei jedem Spannungswert die Ströme addieren ⇒ Die Parallelschaltung hat keinen Einfluß auf das Klemmenverhalten.

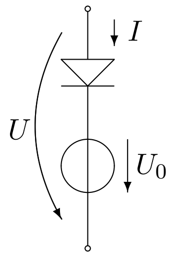


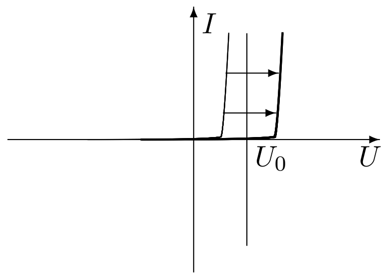


Stromquelle: Bei jedem Stromwert die Spannungen addieren ⇒ Zweipol hat keinen Einfluß auf das Klemmenverhalten

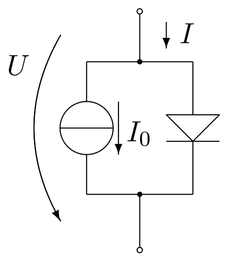


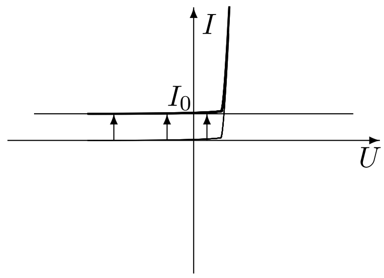






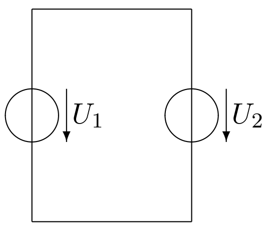
Verschiebung der Kennlinie
in U–Richtung

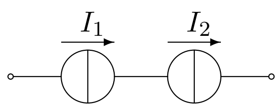




Verschiebung der Kennlinie
in I–Richtung

2.5.4 Unzulässige Zusammenschaltungen





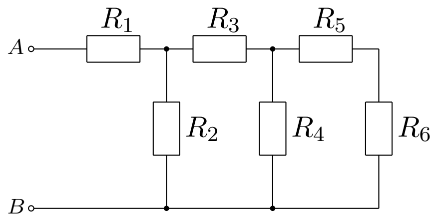
Widerspricht dem Maschensatz! Widerspricht dem Knotensatz!

2.6 Schaltungen mit Widerständen

2.6.1 Reihen–Parallelschaltungen

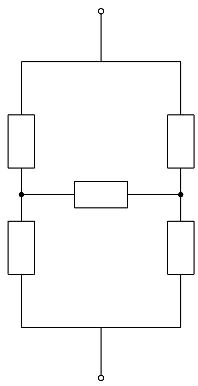
Reihen–Parallelschaltungen lassen sich auf Reihen– und Parallelschaltungen zurückführen.

Beispiel: Abzweigschaltung



$$R_{AB} = R_1 + \cfrac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + \frac{1}{\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5 + R_6}}}}$$

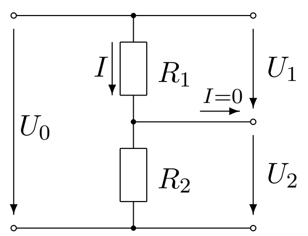
Gegenbeispiel: Brückenschaltung



In der Brückenschaltung gibt es keine zwei Widerstände, die in Reihe oder parallel geschaltet sind.

2.6.2 Strom– und Spannungsteiler

Spannungsteiler



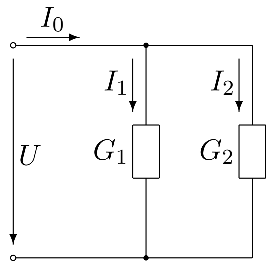
$$I = \frac{U_0}{R_1 + R_2}$$

$$U_2 = I \cdot R_2$$

$$\frac{U_2}{U_0} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{G_1}{G_1 + G_2}$$

$$\frac{\text{Teilspannung}}{\text{Gesamtspannung}} = \frac{\text{Teilwiderstand}}{\text{Gesamtwiderstand}}$$

Stromteiler



$$U = \frac{I_0}{G_1 + G_2}$$

$$I_2 = U \cdot G_2$$

$$\frac{I_2}{I_0} = \frac{G_2}{G_1 + G_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

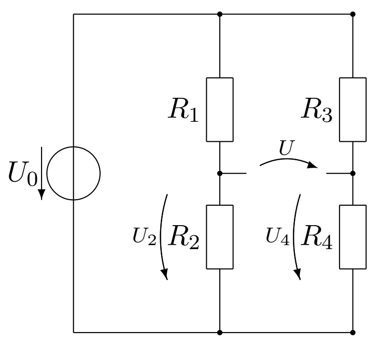
$$\frac{\text{Teilstrom}}{\text{Gesamtstrom}} = \frac{\text{Teilleitwert}}{\text{Gesamtleitwert}}$$

$$= \frac{\text{nicht durchflossener Widerstand}}{\text{Ringwiderstand der Masche}}$$

Beispiele

1. WHEATSTONEsche Brücke

gesucht: U



$$U + U_4 - U_2 = 0$$

$$U = U_4 - U_2$$

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0$$

$$U_4 = \frac{R_4}{R_3 + R_4} U_0$$

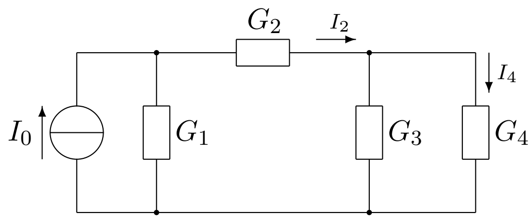
$$U = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0 - \frac{R_4}{R_3 + R_4} U_0 = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) U_0$$

Abgleichbedingung: $U = 0$

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \Leftrightarrow \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_2}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} + \frac{R_4}{R_4}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

2. Mehrfacher Stromteiler



Gesucht: I_4

$$I_4 = \frac{G_4}{G_3 + G_4} \cdot I_2$$

$$I_2 = \frac{G_{234}}{G_2 + G_3 + G_4} I_0 \qquad G_{234} = \frac{1}{\frac{1}{G_2} + \frac{1}{G_3 + G_4}}$$

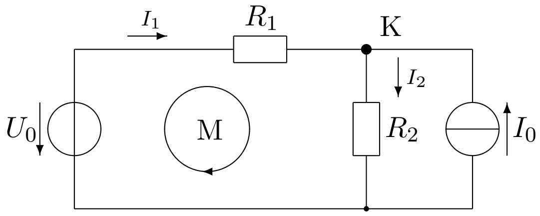
$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{G_4}{G_3 + G_4} \cdot \frac{\frac{1}{\frac{1}{G_2} + \frac{1}{G_3 + G_4}}}{G_1 + \frac{1}{\frac{1}{G_2} + \frac{1}{G_3 + G_4}}} \cdot I_2 \\ &= \frac{G_2 \cdot G_4}{G_1 \cdot G_2 + G_1 \cdot G_3 + G_1 \cdot G_4 + G_2 \cdot G_3 + G_2 \cdot G_4} \cdot I_2 \end{aligned}$$

Kapitel 3

Überlagerungssatz

3.1 Lineare Überlagerung von Ursachen und Wirkungen

3.1.1 Einführungsbeispiel



M: $-U_0+I_1\cdot R_1+I_2\cdot R_2=0$
K: $I_1-I_2+I_0=0$

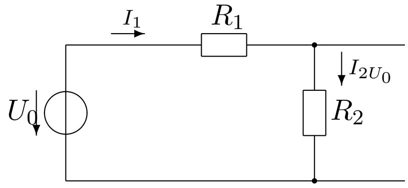
in M: $-U_0+(I_2-I_0)\cdot R_1+I_2\cdot R_2=0$

aus K: $I_1=I_2-I_0$

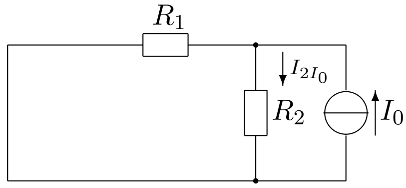
$$I_2(R_1+R_2)=U_0+I_0\cdot R_1$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{R_1+R_2}\cdot U_0+\frac{R_1}{R_1+R_2}\cdot I_0 \\ &= \underbrace{g\cdot U_0}_{I_{2U_0}}+\underbrace{\alpha\cdot I_0}_{I_{2I_0}} \end{aligned}$$

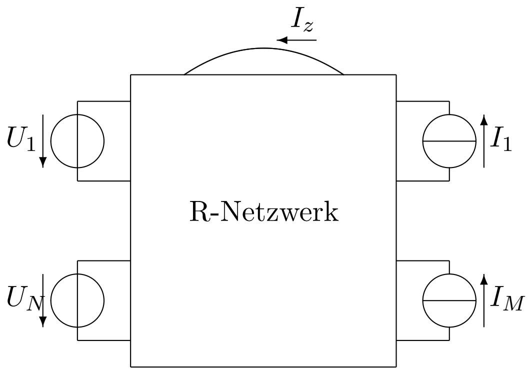
I_{2U_0} : Wirkung von U_0
(bei $I_0=0$)



I_{2I_0} : Wirkung von I_0
(bei $U_0=0$)



allgemein:



$$I_z = \sum_{n=1}^{N} g_n \cdot U_n + \sum_{m=1}^{M} \alpha_m \cdot I_M$$

$$g_n = \left.\frac{I_z}{U_n}\right|_{\text{alle anderen Quellen Null}}$$

$$\alpha_m = \left.\frac{I_z}{I_m}\right|_{\text{alle anderen Quellen Null}}$$

In einem linearen Netzwerk überlagern sich die Wirkungen aller erregenden Quellen.

3.2 Netzwerkanalyse mit Überlagerungsverfahren

Problem:

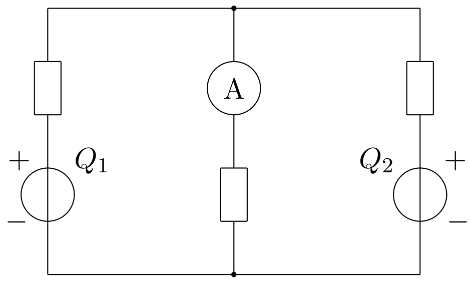
gegeben: *lineares* Netzwerk nit mehreren unabhängigen Quellen

gesucht: Zweigstrom oder Spannung in/über einem Zweig.

Lösungsalgorithmus:

1. Quelle auswählen
2. andere Quellen deaktivieren
   - Spannungsquellen durch Kurzschluss,
   - Stromquellen durch Leerlauf ersetzen
3. Teilwirkung verursacht durch Quelle Q berechnen
4. von Punkt 1 wiederholen bis alle Quellen erfasst sind
5. Teilwirkungen der Quellen überlagern (vorzeichenrichtig addieren)

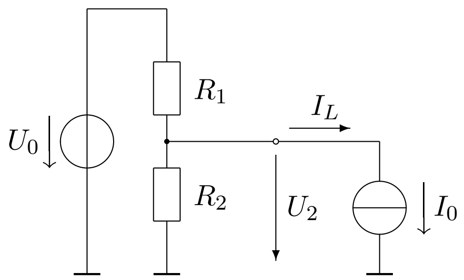
Experiment:



$I = 25\,\mathrm{mA}$

Q_1 kurzgeschlossen: $I = 15\,\mathrm{mA}$
Q_2 kurzgeschlossen: $I = 10\,\mathrm{mA}$

Beispiel: Belasteter Spannungsteiler



$$U_2 = U_{2U_0} + U_{2I_L}$$

$$U_{2U_0} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_0 \quad \text{(Leerlauf)}$$

$$U_{2I_L} = -\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot I_L \quad (\text{nur } I_0)$$

$$U_2 = \underbrace{\frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_0}_{\text{Leerlaufspannung}} \quad \underbrace{-\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot I_L}_{\text{Abweichung durch } I_0}$$

Wie groß darf I_L sein, damit U_2 vom unbelasteten Zustand ($I_L = 0$) höchstens 10 % abweicht?

absoluter Fehler:

$$|\delta U| = |U_2 - U_{2U_0}| = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot I_L$$

relativer Fehler:

$$\epsilon = \frac{|\delta U|}{U_{2U_0}} = \frac{R_1 \cdot I_L}{U_0} \leq 0{,}1 \quad (\widehat{=} 10\,\%)$$

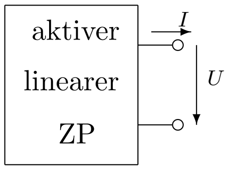
$$\Rightarrow I_L \leq 0{,}1 \cdot \frac{U_0}{R_1}$$

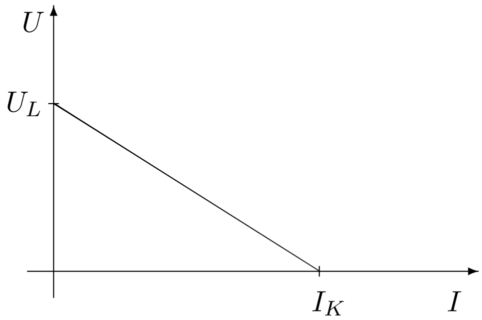
Kapitel 4

Zweipoltheorie

4.1 Aktive lineare Zweipole

4.1.1 Kennfunktion





U_L : Leerlaufspannung
I_K : Kurzschlussstrom

Achsenabschnittsgleichung: $\boxed{\frac{U}{U_L} + \frac{I}{I_K} = 1}$ (*)

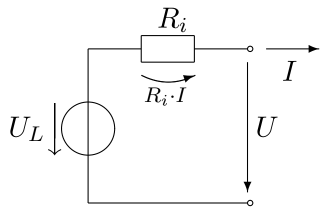
Problem: Konstruktion eines elektrischen Netzwerkes mit gleichem Klemmenverhalten (Ersatzschaltung)

4.1.2 Spannungsquellenersatzschaltung (Thevenin Equivalent Circuit)

(*) nach U auflösen:

$$U = U_L - \frac{U_L}{I_K} \cdot I = U_L - R_i \cdot I \qquad R_i = \frac{U_L}{I_K} \quad : \quad \text{Innenwiderstand}$$

Deutung: Maschensatz

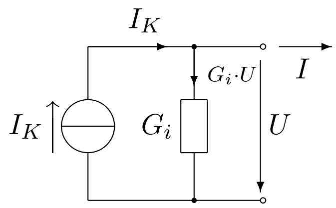


Ein aktiver linearer Zweipol kann durch eine Spannungsquelle in Reihe mit einem Innenwiderstand nachgebildet / modelliert werden. (Satz von HELMHOLTZ, THEVENIN–Theorem).

4.1.3 Stromquellenersatzschaltung (Norton Equivalent Circuit)

(*) nach I auflösen:

$$I = I_K - \frac{I_K}{U_L} \cdot U = I_K - G_i \cdot U \qquad G_i = \frac{I_K}{U_L} = \frac{1}{R_i}$$



Ein aktiver linearer Zweipol kann durch die Parallelschaltung einer Stromquelle mit einem Widerstand modelliert werden. (Satz von MAYER, NORTON–Theorem).

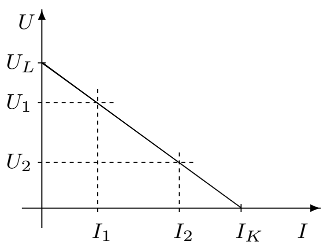
4.1.4 Beispiele und Anwendungen

1. Experimentelle Bestimmung der Ersatzschaltung

   (a) Messung von U_L und $I_K \rightarrow R_i = \frac{U_L}{I_K}$

   (b) Messung zweier geordneter Paare $(U_1,\, I_1)$, $(U_2,\, I_2)$.

$$U = U_L - R_i \cdot I$$



$$\left.\begin{array}{l} U_1 = U_L - R_i \cdot I_1 \\ U_2 = U_L - R_i \cdot I_2 \end{array}\right\} = 2 \text{ Gl. für } U_L \text{ und } R_i$$

$$U_1 - U_2 = -R_i(I_1 - I_2)$$

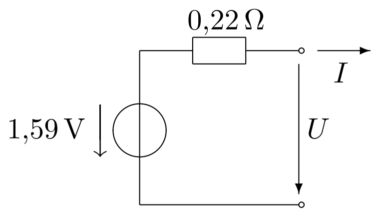
$$R_i = \frac{U_1 - U_2}{I_2}, U_L = \frac{U_2 I_1 - U_1 I_2}{I_1 - I_2}$$

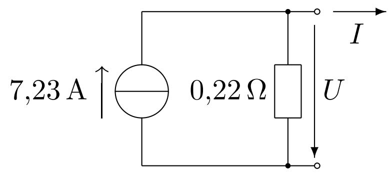
Gemessen an einer Monozelle:

$$\begin{array}{ll} U_1 = 1{,}59\,\mathrm{V} & I_1 = 0{,}00\,\mathrm{A} \\ U_2 = 1{,}36\,\mathrm{V} & I_2 = 1{,}10\,\mathrm{A} \end{array} \qquad R_i = \frac{1{,}59\,\mathrm{V} - 1{,}36\,\mathrm{V}}{1{,}10\,\mathrm{A}} \approx 0{,}22\,\Omega$$

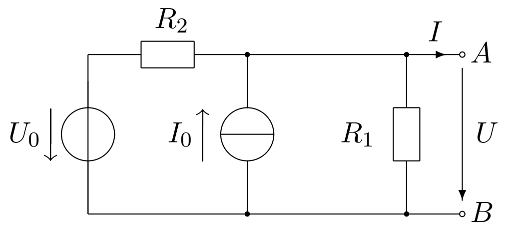
$$R_i = \frac{U_L}{I_K} \Rightarrow I_K = \frac{U_L}{R_i} \approx 7{,}23\,\mathrm{A}$$

Daher läßt sich die Monozelle durch folgende Ersatzschaltbilder darstellen:



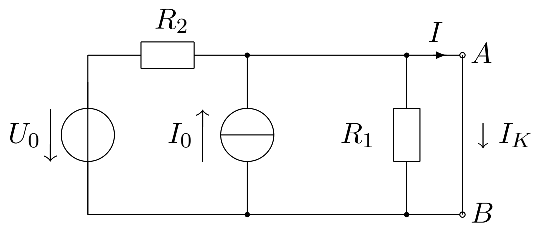


2. Zweipol mit mehreren Quellen



gesucht: U_L, I_K, R_i

$$U_L = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_0 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I_0$$



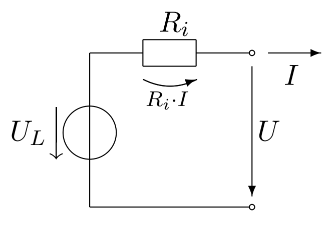
Kurzschluss: R_1 wird wirkungslos, da parallel zum Kurzschluss

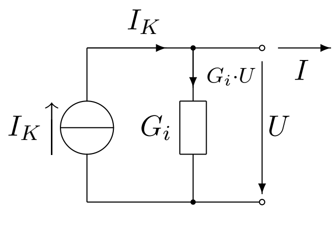
$$I_K = \frac{U_0}{R_2} + I_0$$

$$R_i = \frac{U_L}{I_K} = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

4.2 Netzwerkanalyse mit Zweipoltheorie

4.2.1 Äquivalente aktive Zweipole





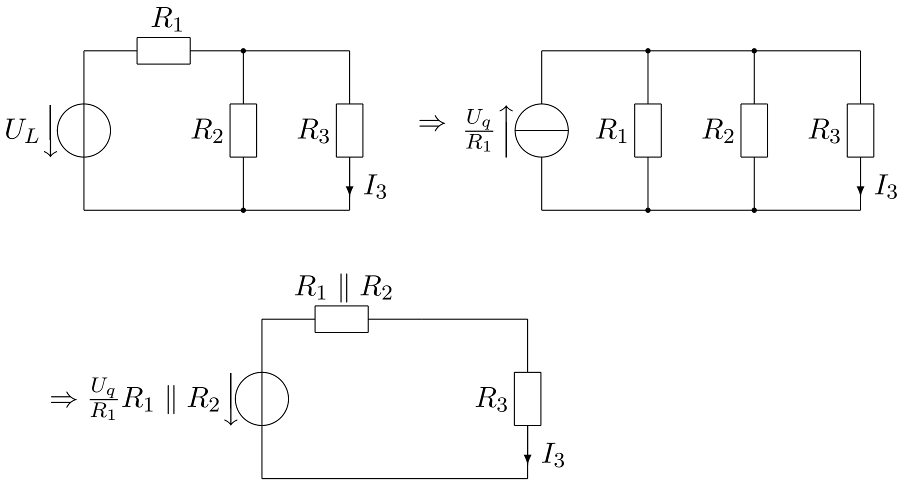
$$\longrightarrow$$

$$I_K = \frac{U_L}{R_i}$$

$$\longleftarrow$$

$$U_L = I_K \cdot R_i$$

Beispiel

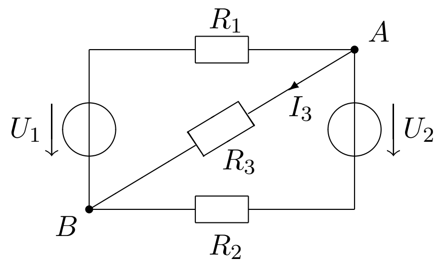


$$I_3 = \frac{U_q \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2}}{R_1 \parallel R_2 + R_3} = \frac{U_q \cdot R_2}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}$$

4.2.2 Verfahren

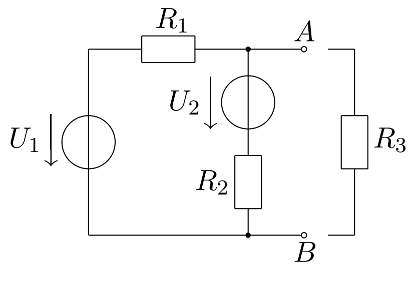
Problem:

gegeben: Netzwerk
gesucht: Strom oder Spannung über *einem* Zweig (hier: I_3)

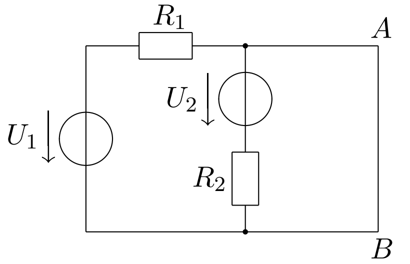


Lösungsalgorithmus

1. Abtrennen des Zweiges mit der gesuchten Größe



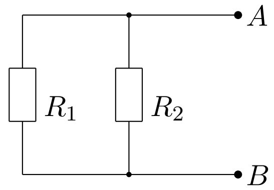
2. Bestimmung der Ersatzparameter des aktiven Zweipols



   (a) $U_L = U_{AB}\Big|_{I_3=0}$ oder

   $I_K = I_3\Big|_{U_{AB}=0}$

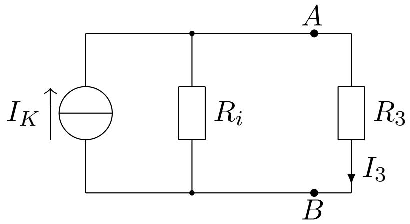
   Beispiel: $I_K = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{I_2}$



   (b) $R_i = R_{AB}$ bei deaktivierten, unabhängigen Quellen, d.h. Spannungsquellen werden kurzgeschlossen, Stromquellen im Leerlauf

   Beispiel: $R_i = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$

3. Ersetzen des aktiven Zweipols durch seine Ersatzschaltung



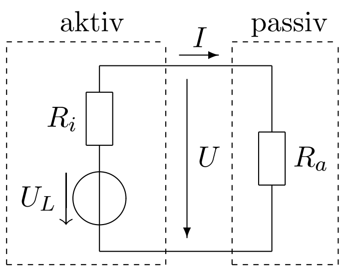
4. Berechnung der gesuchten Größe

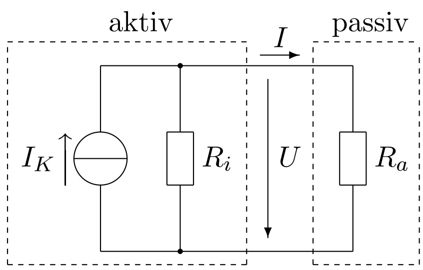
$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{R_i}{R_i + R_3} \cdot I_K = \frac{\frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_3}} \cdot I_K = \frac{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}}{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot R_3} \cdot \left(\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2}\right) \\
&= \frac{U_1 \cdot R_2 + U_2 \cdot R_1}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}
\end{aligned}$$

Kapitel 5

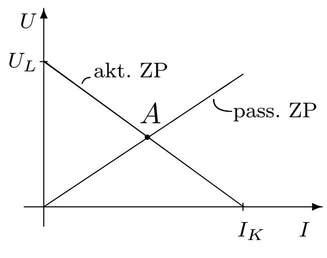
Grundstromkreis

5.1 Strom und Spannung





Spannungsquelle		Stromquelle
$U = U_L - R_i \cdot I$	aktiver Zweipol	$I = I_K - \frac{U}{R_i}$
$U = R_a \cdot I$	passiver Zweipol	$I = \frac{U}{R_a}$

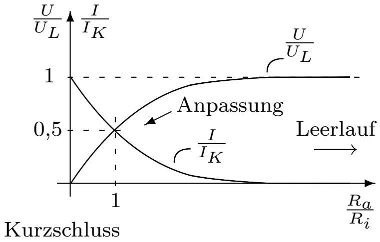


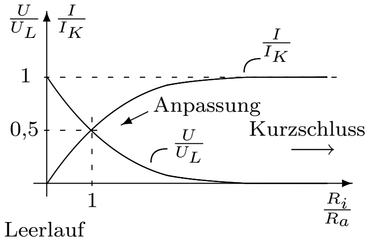
Zusammenschaltung: Beide Gleichungen müssen erfüllt sein

$\Rightarrow$ A Arbeitspunkt (Schnittpunkt der Kennlinien)

$$\frac{U}{U_L} = \frac{R_a}{R_i + R_a} = \frac{\frac{R_a}{R_i}}{1 + \frac{R_a}{R_i}} = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_a}}$$

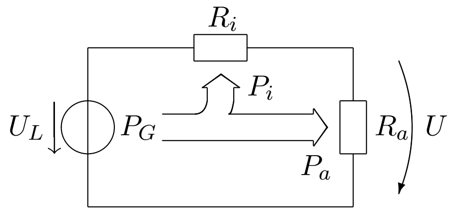
$$\frac{I}{I_K} = \frac{R_i}{R_i + R_a} = \frac{1}{1 + \frac{R_a}{R_i}} = \frac{\frac{R_i}{R_a}}{1 + \frac{R_i}{R_a}}$$





5.2 Leistungsumsatz

5.2.1 Leistungen



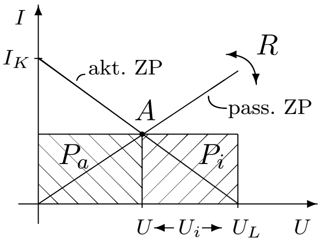
$$\begin{aligned} P_a &= I^2 \cdot R_a = \frac{{U_L}^2}{(R_i+R_a)^2} \cdot R_a = \frac{{U_L}^2}{R_i} \frac{\frac{R_a}{R_i}}{\left(1+\frac{R_a}{R_i}\right)^2} \\ &= \frac{{U_L}^2}{R_a \cdot \left(1+\frac{R_i}{R_a}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_i &= I^2 \cdot R_i = \frac{{U_L}^2}{(R_i+R_a)^2} \cdot R_i = \frac{{U_L}^2}{R_i} \frac{1}{\left(1+\frac{R_a}{R_i}\right)^2} \\ & \frac{{U_L}^2}{R_a} \frac{\frac{R_i}{R_a}}{\left(1+\frac{R_i}{R_a}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_G &= P_i + P_a = I^2 \cdot (R_i + R_a) = \frac{{U_l}^2}{(R_i+R_a)^2} \cdot (R_i + R_a) \\ &= \frac{{U_L}^2}{R_i + R_a} \end{aligned}$$

Elektrischer Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_a}{P_G} = \frac{I^2 \cdot R_a}{I^2 \cdot (R_1 + R_a)} = \frac{R_a}{R_i + R_a} = \frac{\frac{R_a}{R_i}}{(1 + \frac{R_a}{R_i})} = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_a}}$$

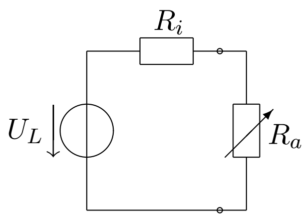


Graphische Darstellung der Leistung P_G, zusammengesetzt aus P_a und P_i

5.2.2 Informationstechnische Aufgabe

gegeben: Generator (U_L, R_i) (z.B. Meßwertgeber, Mikrofon, Solarzelle …)

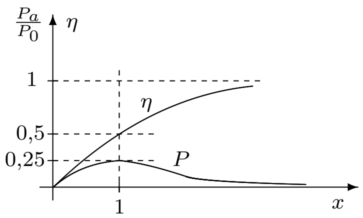
gesucht: Verbraucher (R_a) so, daß P_a maximal wird



$$P_a = \frac{{U_L}^2}{R_i} \cdot \frac{\frac{R_a}{R_i}}{\left(1 + \frac{R_a}{R_i}\right)^2} = P_0 \cdot \frac{x}{(1+x)^2}$$

$$\text{mit } P_0 = \frac{{U_L}^2}{R_i} \text{ und } x = \frac{R_a}{R_i}$$

Durch Differenzieren: Maximum bei $x = 1$.



$$P_{max} = \frac{P_0}{4} = \frac{{U_L}^2}{4 \cdot R_i}$$

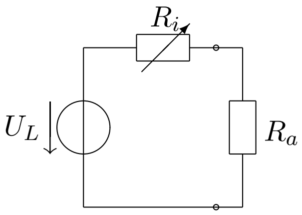
$$\eta = \frac{\frac{R_a}{R_i}}{1 + \frac{R_a}{R_i}}$$

Um maximale Leistung aus einem vorgegebenen Generator zu entnehmen muß $R_a = R_i$ gewählt werden. Der Wirkungsgrad ist dabei 0,5.

5.2.3 Energietechnische Aufgabe

gegeben: Verbraucher (R_a)

gesucht: Generator mit R_i so, daß η maximal wird

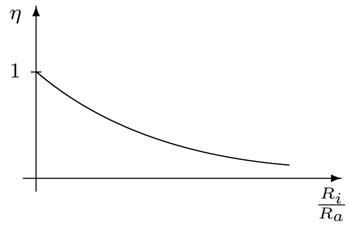


(aus 5.2.2.:)

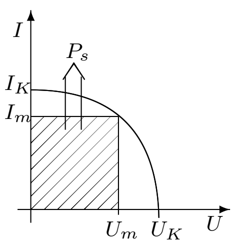
$$\eta = \frac{\frac{R_a}{R_i}}{1 + \frac{R_a}{R_i}} \Rightarrow \text{Maximum bei } R_i = 0$$

$$P_{max} = \frac{{U_L}^2}{R_a}$$

Um maximalen Wirkungsgrad zu erzielen muß $R_i \ll R_a$ sein $\rightarrow$ aktiver Zweipol im Leerlauf.

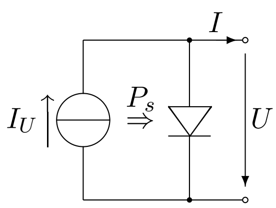


5.2.4 Nichtlinearer aktiver Zweipol: Solarzelle

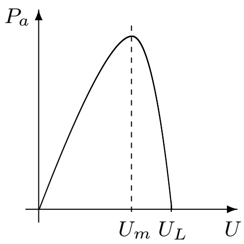


Kenngleichung:

$$I = I_U - I_S \cdot e^{\frac{U}{U_T}}$$



Abgegebene Leistung: $P = U \cdot I = U \cdot \left(I_K - I_s \cdot e^{\frac{U}{U_T}} \right)$



maximale Leistung:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}U} &= I_K - I_s \cdot e^{\frac{U}{U_T}} - \frac{U}{U_T} \cdot I_s \cdot e^{\frac{U}{U_T}} = \\ &= I_K - I_s \cdot e^{\frac{U}{U_T}} \left(1 + \frac{U}{U_T} \right) \Rightarrow \ 0 \text{ für } U = U_m \end{aligned}$$

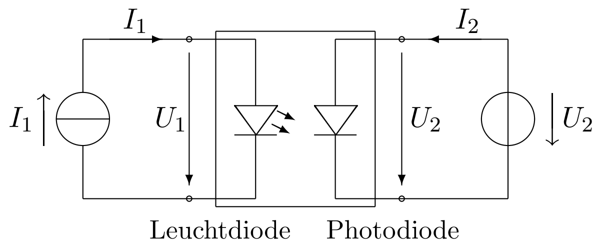
$$0 = I_K - I_s \cdot e^{\frac{U}{U_T}} \left(1 + \frac{U}{U_T} \right)$$

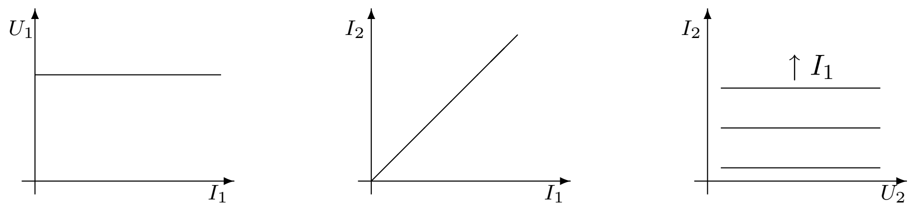
$\Rightarrow$ nach U_m auflösen, $I_m = I_k - I_s \cdot e^{\frac{U}{U_T}}$, $\Rightarrow P_{max} = U_m \cdot I_{max}$.

Kapitel 6

Gesteuerte Quellen

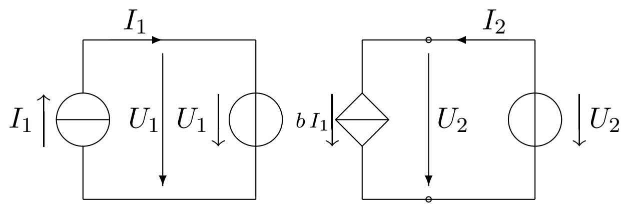
6.1 Einführungsbeispiel: Optokoppler





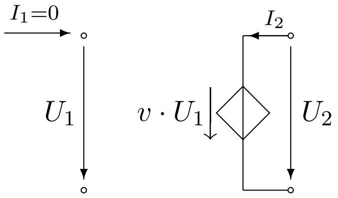
Der Optokoppler stellt eine stromgesteuerte Stromquelle dar (engl. **C**urrent **C**ontrolled **C**urrent **S**ource).

Ersatzschaltung:



6.2 Arten gesteuerter Quellen

6.2.1 Spannungsgesteuerte Spannungsquelle

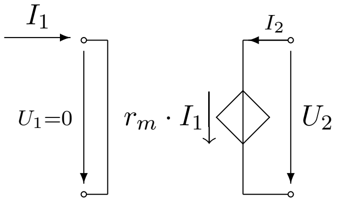


$$I_1 = 0$$
$$U_2 = v \cdot U_1$$

v
Spannungsverstärkung
$[v] = 1$

Beispiel: Spannungsverstärker, Operationsverstärker

6.2.2 Stromgesteuerte Spannungsquelle

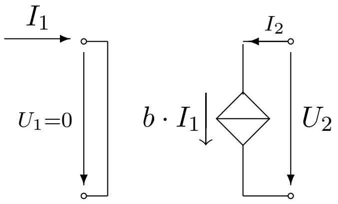


$$U_1 = 0$$
$$U_2 = r_m \cdot I_1$$

r_m
Übergangswiderstand,
Transimpedanz
$[r_m] = \Omega$

Beispiel: fremderregte Gleichstrommaschine

6.2.3 Stromgesteuerte Stromquelle

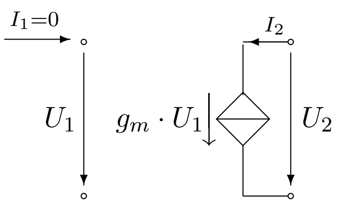


$$U_1 = 0$$
$$I_2 = b \cdot I_1$$

b
Stromverstärkung
$[b] = 1$

Beispiel: Bipolartransistor, Optokoppler

6.2.4 Spannungsgesteuerte Stromquelle



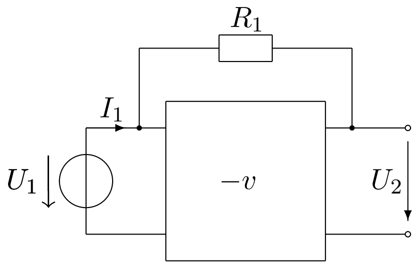
$$I_1 = 0$$
$$I_2 = g_m \cdot U_1$$

g_m
Übertragungsleitwert,
Transkonduktanz,
Steilheit
$[g_m] = S = \mho$

Beispiel: Feldeffekttransistor, Elektronenröhre

6.3 Anwendungen und Beispiele

6.3.1 Gegengekoppelter Verstärker

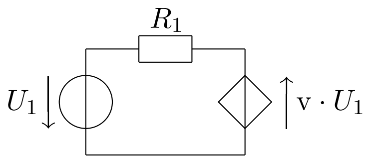


$$U_2 = -v \cdot U_1$$

$$\text{gesucht: } R_E = \frac{U_1}{I_1}$$

(Eingangswiderstand der Schaltung)

Ersatzschaltung:



Maschensatz: $U_1 + v \cdot U_1 - I_1 \cdot R_1 = 0$

$$I_1 = \frac{1+v}{R_1} \cdot U_1 \rightarrow R_E = \frac{U_1}{I_1} = \frac{R_1}{1+v}$$

Der Ausgangswiderstand ist sehr klein, daher verhält der Verstärker sich wie eine Spannungsquelle.

praktische Zahlenwerte:

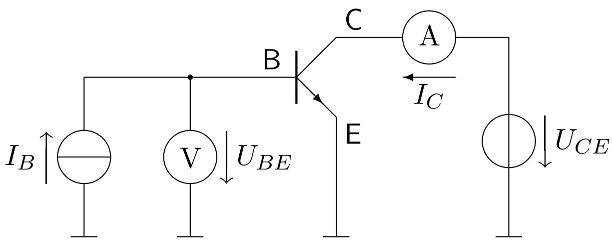
$R = 10\,\mathrm{k}\Omega$, $v = 10^4$

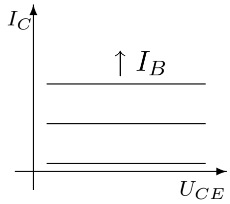
$$R_E = \frac{10^4\,\Omega}{10^4 + 1} \approx 1\,\Omega \qquad \text{„Miller-Effekt“}$$

Für $v < 0$ bzw. $-v > 0$, z.B. $v = -10$

$$U_2 = 10 \cdot U_1 \qquad R_R = \frac{R_1}{1+v} = -\frac{10^4\,\Omega}{1-10} \approx -1,1\,\mathrm{k}\Omega$$

6.3.2 Bipolartransistor



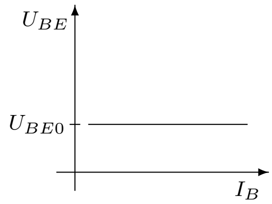


Durch Messung:

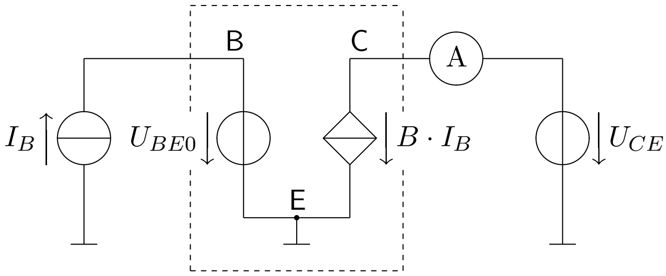
$$I_C = B \cdot I_B$$

$$(I_B > 0,\ U_{CE} > 0{,}2\,\mathrm{V})$$

$$U_{BE} = U_{BEC0}$$



Netzwerkmodell (Ersatzschaltung) eines Bipolartransistors

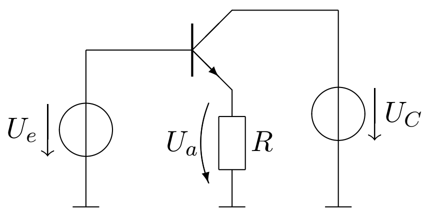


Dieses Modell kann verfeinert werden, da die tatsächliche U_{CE}/I_C–Kennlinie eine (geringe) Abhängigkeit des Stromes von der Spannung und die I_B/U_{BE}–Kennlinie eine Abhängigkeit der Spannung vom Strom aufweist. Es ergeben sich die Formeln:

$I_C = B \cdot I_B + G_{CE} \cdot U_{CE}$ (G_{CE} parallel zur Collector–Emitter–Strecke)

$U_{BE} = U_{BEC0} + R_{BE} \cdot I_B$ (R_{BE} in Serie zur Basis)

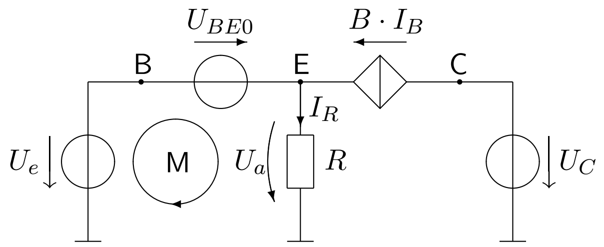
Anwendungsbeispiel: Leistungsverstärker



gesucht:

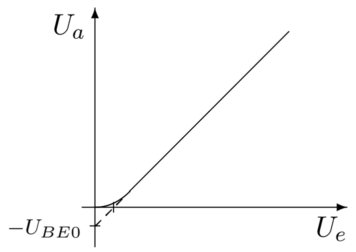
a) U_a als Funktion von U_e

b) $\dfrac{P_a}{P_e}$ als Funktion von U_e



Ersatzschaltung des Leistungsverstärkers. Mit Hilfe des Maschen– und Knotenpunktsatzes sind die gesuchten Werte zu ermitteln.

a) $\circlearrowright \mathsf{M}: -U_e + U_{BE0} + U_a = 0 \quad \Rightarrow \quad U_a = U_e - U_{BE0}$



Die Steigung des Graphen ist stellt die Spannungsverstärkung dar, die in diesem Falle 1 beträgt (Spannungsfolger).

b) $P_a = \dfrac{{U_a}^2}{R} = \dfrac{(U_e - U_{BE0})^2}{R}$

$P_e = U_e \cdot I_B$

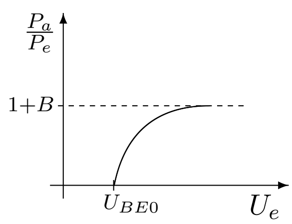
Zur Berechnung von $\dfrac{P_a}{P_e}$ muß I_B ermittelt werden:

$U_a = I_R \cdot R = (I_B + B \cdot I_B) \cdot R = I_B \cdot (1 + R) \cdot R$

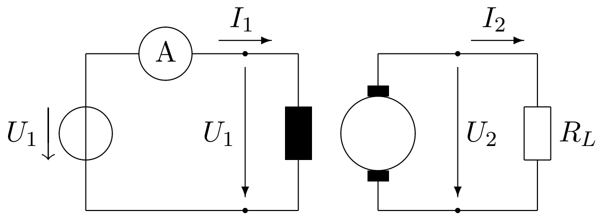
$I_B = \dfrac{U_a}{(1+B) \cdot R} = \dfrac{U_e - U_{BE0}}{(1+B) \cdot R}$

$$P_e = \frac{U_e - U_{BE0}}{(1+B) \cdot R} \cdot U_e$$

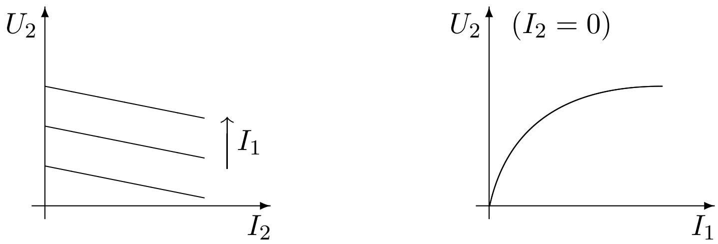
$$\frac{P_a}{P_e} = [\cdots] = \left(1 - \frac{U_{BE0}}{U_e}\right)(1+B)$$



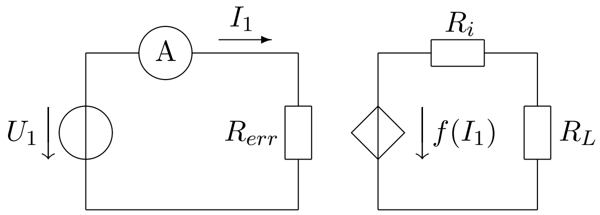
6.3.3 Fremderregte Gleichstrommaschine



Kennlinien



Ersatzschaltung

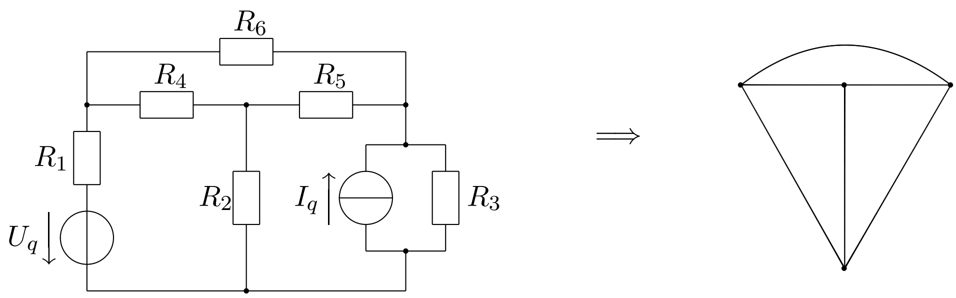


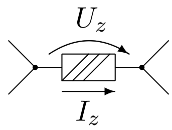
Kapitel 7

Methoden der Netzwerkanalyse

7.1 Netzwerkbeschreibung

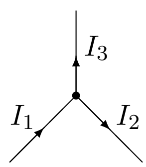
Ein Netzwerk besteht aus Zweigen und Knoten. Seine Struktur läßt sich durch einen Graphen darstellen:





Zweig: U–I–Relation

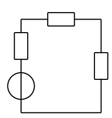
$F(U, I) = 0$
$\rightarrow U = Z(I)$ bzw. $I = Y(U)$



Knoten: Nach Knotenpunktsatz:

$$\sum_n I_{z_n} = 0$$

Masche: geschlossener Umlauf durch Zweige ohne Schleife



$$\sum_m U_{z_m} = 0$$

7.1.1 Grundaufgabe der Netzwerkanalyse

gegeben:
- Netzwerk mit z Zweigen und k Knoten
- U–I–Relationen der Zweige

gesucht:
- z Zweigströme und z Zweigspannungen

$\Rightarrow 2z$ Unbekannte

Gleichungen:

z	U–I–Relationen der Zweige
$k-1$	unabhängige Knotengleichungen
$z-(k-1)$	unabhängige Maschengleichungen
$2z$	Gleichungen

7.2 Analyse mit dem vollständigen Kirchhoffschen Gleichungssystem

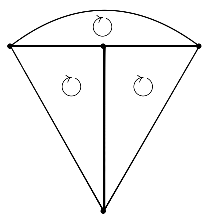
Algorithmus

1. Festlegung der Zählrichtung für alle Zweigspannungen und Zweigströme
2. Aufstellung der U–I–Relationen der Zweige
3. Auswahl von $k-1$ Knoten und Aufstellung der Knotengleichungen (Verbindungen auf gleichem Potential zu jeweils einem Knoten zusammenfassen)
4. Auswahl von $n = z-(k-1)$ unabhängigen Maschen und Aufstellung der Maschengleichungen
5. Lösen der Gleichungen

Es gibt verschiedene Methoden um Schritt 4 auszuführen:

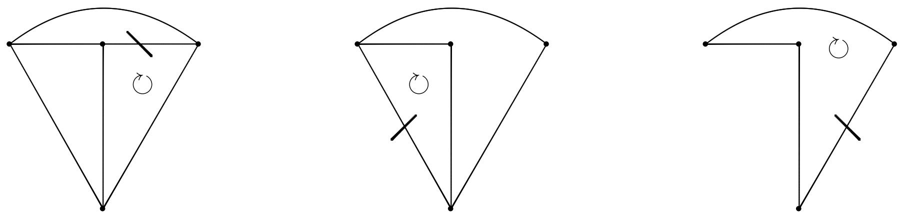
7.2.1 Methode des vollständigen Baumes

Der Vollständige Baum enthält $k-1$ Zweige (dargestellt durch dicke Linien). Die übrigen $m = z-(k-1)$ Zweige heißen Verbindungszweige.
Ergänzt man nun jeden unabhängigen Zweig über den vollständigen Baum zu einer Masche, so entsteht ein vollständiges System unabhängiger Maschen.

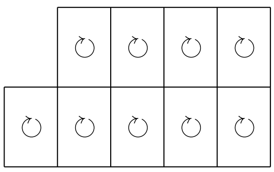


7.2.2 Kennzeichnungs– oder Auftrennmethode

- Wahl einer Masche und Kennzeichnen (Auftrennen) eines Zweiges, der in keiner weiteren Masche enthalten sein darf
- Widerholen, bis keine weitere Masche zu finden ist

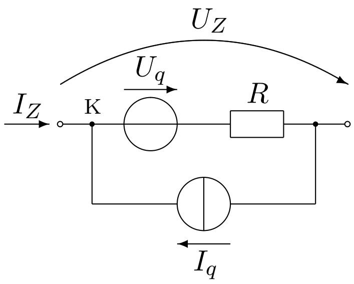


7.2.3 Fenstermaschenmethode



Auswahl „fensterartig“ nebeneinanderliegender Maschen. Nur auf ebene Graphen anwendbar.

7.2.4 Allgemeiner Zweig in einem linearen resistiven Netzwerk



Maschensatz: $U_Z - I_R \cdot R - U_q = 0$

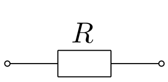
Knotenpunktsatz: $I_Z + I_q - I_R = 0$

$\Rightarrow I_R = I_q + I_Z$

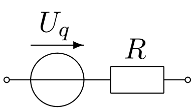
(in Maschensatz einsetzen..)

$$U_Z = I_q \cdot R - I_Z \cdot R - U_q = U \Leftrightarrow U_Z - I_Z \cdot R = U_q + I_q \cdot R$$

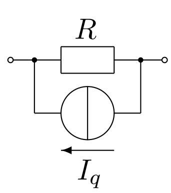
Sonderfälle



$U_z - I_Z \cdot R = 0$

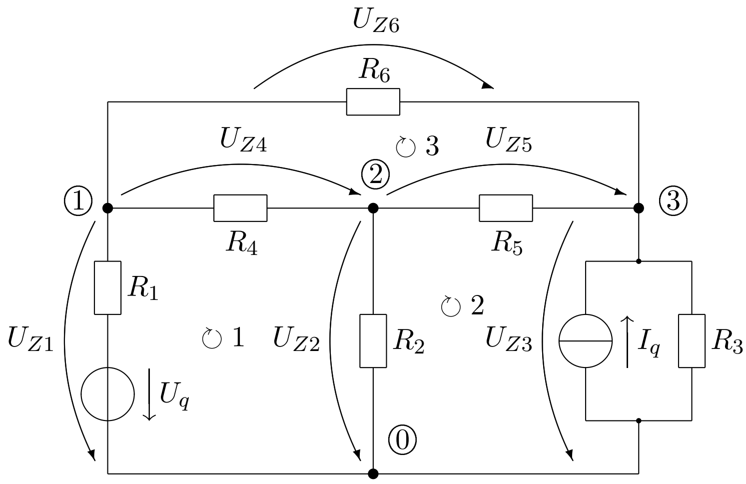


$U_Z - I_Z \cdot R = U_q$



$U_Z - I_Z \cdot R = I_q \cdot R$

7.2.5 Beispielnetzwerk



Knotengleichungen: abfließende Ströme positiv

$$\left.\begin{array}{ll} ① & I_{Z1}+I_{Z4}+I_{Z6}=0 \\ ② & I_{Z2}-I_{Z4}+I_{Z5}=0 \\ ③ & I_{Z3}-I_{Z5}-I_{Z6}=0 \end{array}\right\} k-1=3 \text{ Gleichungen}$$

Maschengleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} \circlearrowright 1 & -U_{Z1}+U_{Z2}+U_{Z4}=0 \\ \circlearrowright 2 & -U_{Z2}+U_{Z3}+U_{Z5}=0 \\ \circlearrowright 3 & -U_{Z4}-U_{Z5}+U_{Z6}=0 \end{array}\right\} m=z-(k-1)=3 \text{ Gleichungen}$$

$\Rightarrow$ **Vollständiges Kirchhoffsches Gleichungssystem**

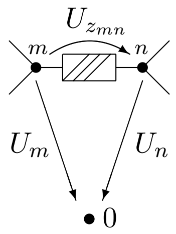
$$\begin{bmatrix} -R_1 & & & & & & 1 & & & & & \\ & -R_2 & & & & & & 1 & & & & \\ & & -R_3 & & & & & & 1 & & & \\ & & & -R_4 & & & & & & 1 & & \\ & & & & -R_5 & & & & & & 1 & \\ & & & & & -R_6 & & & & & & 1 \\ 1 & & & 1 & & 1 & & & & & & \\ & 1 & & -1 & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & -1 & -1 & & & & & & \\ & & & & & & -1 & 1 & & 1 & & \\ & & & & & & & -1 & 1 & & 1 & \\ & & & & & & & & & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{Z1} \\ I_{Z2} \\ I_{Z3} \\ I_{Z4} \\ I_{Z5} \\ I_{Z6} \\ U_{Z1} \\ U_{Z2} \\ U_{Z3} \\ U_{Z4} \\ U_{Z5} \\ U_{Z6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_q \\ 0 \\ I_q \cdot R_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wertung

Das Verfahren ist immer anwendbar, enthält jedoch sehr viel Gleichungen $\Rightarrow$ Vereinfachungen möglich

7.3 Knotenspannungsanalyse (Node analysis)

7.3.1 Knotenspannungen (Knotenpotentiale)

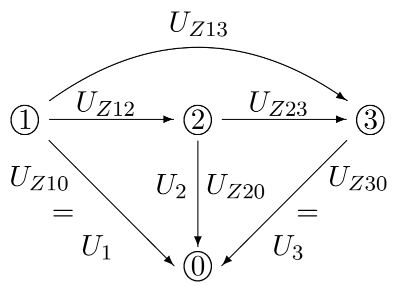


Knotenspannung: Spannung zwischen einem Knoten und einem Bezugspunkt. Bezugspunkt 0 kann willkürlich festgelegt werden. Zweckmäßig ist die Wahl eines Knotens mit möglichst vielen Anschlüssen.

$$-U_m + U_{z_{mn}} + U_n = 0$$

$$U_{z_{mn}} = U_m - U_n$$

Alle Zweigspannungen lassen sich durch die Knotenspannungen ausdrücken.



$$\underbrace{\begin{bmatrix} U_{Z10} \\ U_{Z20} \\ U_{Z30} \\ U_{Z12} \\ U_{Z23} \\ U_{Z13} \end{bmatrix}}_{z=6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}}_{k-1=3}$$

$\circlearrowright$: $U_{Z12} + U_2 - U_1 = 0 \Rightarrow U_{Z12} = U_1 - U_2$
$\circlearrowright$: $U_{Z23} + U_3 - U_2 = 0 \Rightarrow U_{Z23} = U_2 - U_3$

Sind in einem Netzwerk die Knotenspannungen bekannt, so können die Zweigspannungen daraus berechnet werden.

$\Rightarrow$ Es brauchen nur die $k-1$ Knotenspannungen bestimmt zu werden (3 Unbekannte anstelle von 12!).

7.3.2 Verfahren

Voraussetzung: Die U–I–Relationen der Zweige müssen sich nach den Zweigströmen auflösen lassen ($\longrightarrow$ keine Spannungsquellen!)

Folgerung: Das Netzwerk darf nur unabhängige oder Spannungsgesteuerte Stromquellen enthalten (Spannungsquellen und stromgesteuerte Quellen vorher umrechnen).

Algorithmus

1. Wahl eines Bezugsknotens und Einführung der Knotenspannungen.

2. Aufstellen von $k-1$ (Knoten–)Gleichungen unter Verwendung der U–I–Relationen der Zweige (zweckmäßig Leitwerte verwenden)

3. Lösung der Gleichungen $\Rightarrow$ Knotenspannungen

4. Berechnung der gesuchten Größen aus den Knotenspannungen

Knotengleichungen: abfließende Ströme positiv

$$
\begin{array}{lr}
① \; I_{10}+I_{12}+I_{13}=0 \longrightarrow & -U_1G_1+G_1U_1+G_4(U_1-U_2)+G_6(U_1-U_3)=0 \\
② \; I_{20}+I_{21}+I_{23}=0 \longrightarrow & G_2U_2+G_4(U_2-U_1)+G_5(U_2-U_3)=0 \\
③ \; I_{30}+I_{31}+I_{32}=0 \longrightarrow & -I_q+G_3U_3+G_6(U_3-U_1)+G_5(U_3-U_2)=0
\end{array}
$$

In Matrixform:

$$
\begin{bmatrix} G_1+G_4+G_6 & -G_4 & -G_6 \\ -G_4 & G_2+G_4+G_5 & -G_5 \\ -G_6 & -G_5 & G_3+G_6+G_5 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} U_qG_1 \\ 0 \\ I_q \end{bmatrix}
$$

Allgemeine Form:

$$\Big(G\Big)\cdot\Big(U\Big)=\Big(I\Big)$$

G	:	Knotenadmittanzmatrix
U	:	Vektor der Knotenspannungen
I	:	Vektor der Einströmungen

Elemente der Knotenadmittanzmatrix:

$$\Big(G\Big)=\Big(G_{ij};\; i,\, j=1\ldots k-1\Big)$$

Hauptdiagonale: $G_{ii}=\sum$ Leitwerte am Knoten i

andere Elemente: $G_{ij}(i\neq j)=-$ Leitwert vom Knoten i zum Knoten j

$\Rightarrow$ Die Knotenadmittanzmatrix ist symmetrisch, wenn das Netzwerk keine gesteuerten Quellen enthält.

Vektor der Einströmungen:

$$\Big(I\Big)=\Big(I_i,\; i=1\ldots k-1\Big)$$

$I_i=$ am Knoten i durch unabhängige Quellen eingespeister Strom

7.3.3 Knotenspannungsanalyse mit gesteuerten Quellen

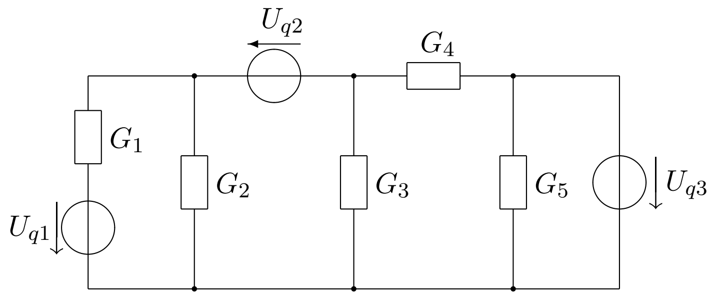
(Netzwerk wie 7.2.4, zusätzlich parallel zu G_5 eine gesteuerte Stromquelle mit $I_{q2} = g_m \cdot U_2$)

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_4 + G_6 & -G_4 & -G_6 \\ -G_4 & G_2 + G_4 + G_5 - g_m & -G_5 \\ -G_6 & -G_5 + g_m & G_3 + G_6 + G_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_q G_1 \\ 0 \\ I_q \end{bmatrix}$$

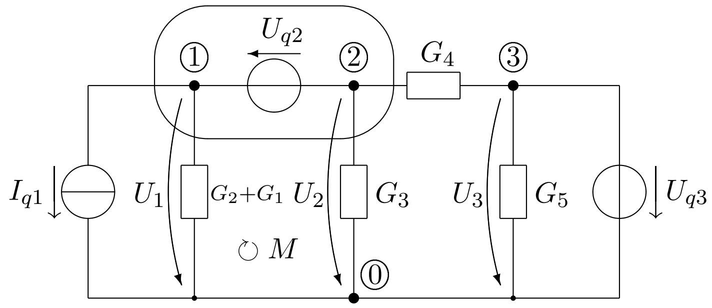
1 unverändert
2 $G_2U_2 + G_4(U_2 - U_1) + G_5(U_2 - U_3) - g_mU_2 = 0$
3 $G_3U_3 + G_6(U_3 - U_1) + G_5(U_3 - U_2) + g_mU_2 - I_q = 0$

7.3.4 Knotenspannungsanalyse mit Spannungsquellen

Beispielschaltung mit Spannungsquellen:



Umwandlung von U_{q1}: $I_{q1} = G_1 \cdot U_{q1}$ ...



Gesucht: Knotenspannungen U_1, U_2, U_3

$U_3 = U_{q3}$

$\circlearrowleft M : U_{q2} + U_1 - U_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad U_2 = U_1 + U_{q2}$

Schnittmengengleichung am „Superknoten“ (Oval):

$$U_{q1} \cdot G_1 - U_1(G_1 + G_2) - G_3 \cdot U_2 - G_4(U_2 - U_3) = 0$$

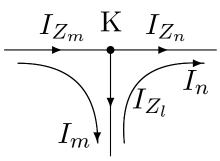
$U_2 = U_1 + U_{q2}$ und $U_3 = U_{q3}$ einsetzen:

$$U_{q1} \cdot G_1 - U_1(G_1 + G_2 + G_3 + G_4) - U_{q2}(G_3 + G_4) + U_{q3} \cdot G_4 = 0$$

$$U_1 = \frac{U_{q1} \cdot G_1 - U_{q2}(G_3 + G_4) + U_{q3} \cdot G_4}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4}$$

7.4 Maschenstromanalyse (mesh/loop analysis)

7.4.1 Maschenströme

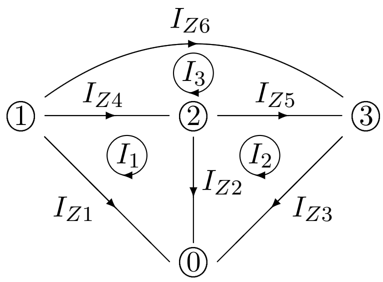


Am Knoten K ergibt sich ein Zweigstrom (z.B. I_{Z_l}) aus den beiden anderen.

$$I_{Z_m} - I_{Z_n} - I_{Z_l} = 0 \quad \Rightarrow \quad I_{Z_l} = I_{Z_m} - I_{Z_n}$$

Er kann aufgefasst werden als Überlagerung eines Maschenstromes $I_m = I_{Z_m}$ und $I_n = I_{Z_n}$.
Werden in allen m unabhängigen Maschen Maschenströme eingeführt, so laßen sich alle Zweigströme dadurch ausdrücken.

Beispiel



$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_{Z1} \\ I_{Z2} \\ I_{Z3} \\ I_{Z4} \\ I_{Z5} \\ I_{Z6} \end{bmatrix}}_{z=6} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}}_{z-(k-1)=3}$$

7.4.2 Verfahren

Voraussezung: Die U–I–Relationen der Zweige müssen sich nach den Spannungen auflösen lassen.

Folgerung: Das Netzwerk darf nur unabhängige oder stromgesteuerte Spannungsquellen enthalten (Stromquellen und spannungsgesteuerte Stromquellen vorher umrechnen).

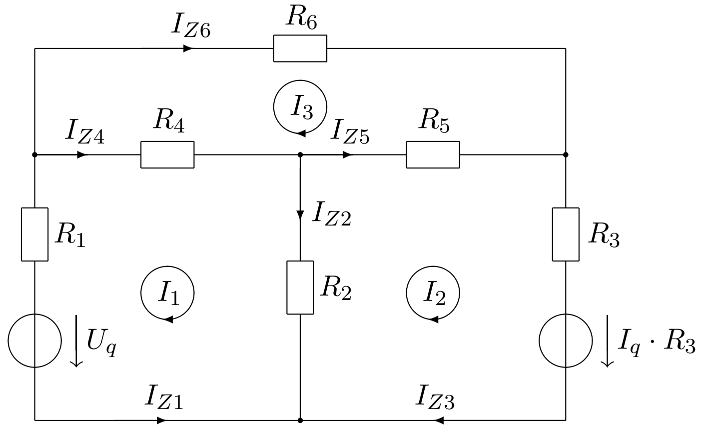
Algorithmus: 1. Wahl von m unabhängigen Maschen und Einführung der Maschenströme.

2. Aufstellen von m Maschengleichungen unter Verwendung der U–I–Relationen der Zweige (zweckmäßig Widerstände verwenden).

3. Lösung der Gleichungen $\Rightarrow$ Maschenströme
4. Berechnung der gesuchten Größen aus den Maschenströmen.

Netzwerk

Beispielnetzwerk aus 7.2.5., Stromquelle I_q in Spannungsquelle umgewandelt



$\circlearrowright$ $1: -U_q + R_1 \cdot I_1 + R_4 \cdot (I_1 - I_3) + R_2 \cdot (I_1 - I_2) = 0$
$\circlearrowright$ $2: R_2 \cdot (I_2 - I_1) + R_5 \cdot (I_2 - I_3) + R_3 \cdot I_2 + I_q \cdot R_3 = 0$
$\circlearrowright$ $3: R_6 \cdot I_3 + R_5 \cdot (I_3 - I_2) + R_4 \cdot (I_3 - I_1) = 0$

In Matrixform

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_2 + R_4) & -R_2 & -R_4 \\ -R_2 & (R_2 + R_3 + R_5) & -R_5 \\ -R_4 & -R_5 & (R_4 + R_5 + R_6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_q \\ -I_q R_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Allgemeine Form

$$\Big(R\Big) \cdot \Big(I\Big) = \Big(U_q\Big)$$

R	:	Maschenimpedanzmatrix
I	:	Vektor der Maschenströme
U_q	:	Vektor der negativen Quellenspannungen

Bildung der Maschenimpedanzmatrix

$\Big(R\Big) = (R_{ij},\ i,\, j = 1 \ldots m)$

Hauptdiagonale: $R_{ii} = \sum$ Widerstände in Masche i

andere Elemente: R_{ij} = gemeinsamer Koppelwiderstand von Masche i und Masche j. Positiv, wenn I_i und I_j in gleicher Richtung durch den Koppelwiderstand fließen, negativ, wenn I_i und I_j in Gegenrichtung fließen.

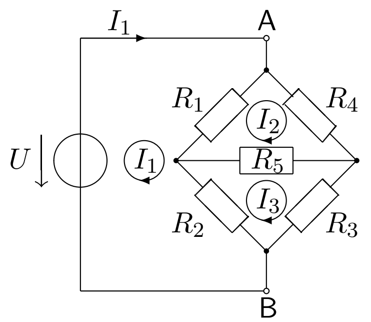
Bildung des Vektors der negativen Quellenspannungen

$\left(U_q\right) = (U_{qi},\ i = 1 \ldots m)$
$U_{qi} = -\sum$ Spannungen der unabhängigen Spannungsquellen in Masche i.

Die Impedanzmatrix ist symmetrisch, wenn das Netzwerk keine gesteuerten Quellen enthält.

7.4.3 Anwendungen und Beispiele

1. Widerstandsberechnung



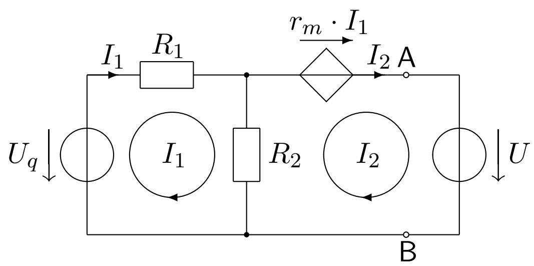
gesucht: R_{AB}

1. Anschließen einer Spannungsquelle
2. Berechnung von I_1
3. $R_{\mathsf{AB}} = \dfrac{U}{I_1}$

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_1 & -R_2 \\ -R_1 & R_1 + R_4 + R_5 & -R_5 \\ -R_2 & -R_5 & R_2 + R_3 + R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lösung der Gleichung in der Regel numerisch.

2. Maschenstromanalyse mit stromgesteuerter Spannungsquelle



gesucht: Klemmenverhalten des Zweipols A–B. I im Abhängigkeit von U.

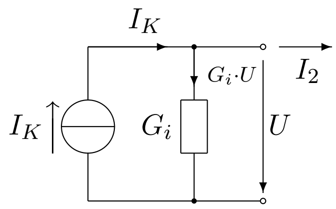
$\circlearrowright 1: -U_q + R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot (I_1 - I_2) = 0$
$\circlearrowright 2: R_2 \cdot (I_2 - I_1) + r_m \cdot I_1 + U = 0$

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 + r_m & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_q \\ -U \end{bmatrix}$$

Gesucht: $I_2 \Rightarrow$ nach I_2 umstellen…

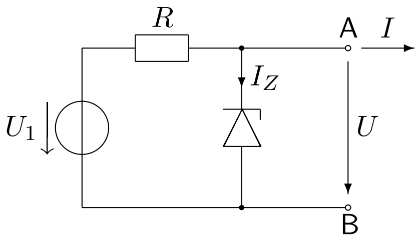
$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & U_q \\ r_m - R_2 & -U \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ r_m - R_2 & R_2 \end{vmatrix}} = \frac{-U \cdot (R_1 + R_2) - U_q \cdot (r_m - R_2)}{R_2 \cdot (R_1 + R_2) + R_2 \cdot (r_m - R_2)}$$

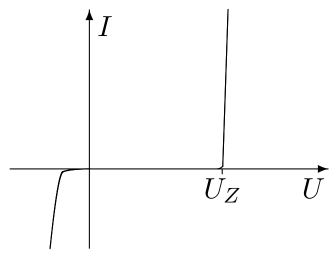
$$I_2 = \underbrace{\frac{R_2 - r_m}{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot r_m} \cdot U_q}_{I_K} - \underbrace{\frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot r_m}}_{G_i = \frac{1}{R_i}} \cdot U$$



Die Schaltung entspricht der Stromquellenersatzschaltung!

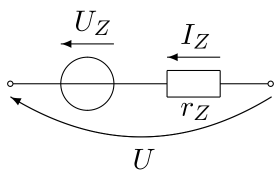
3. Spannungsstabilisierung mit Z–Diode





$$I_Z = \begin{cases} 0 & U \leq U_Z \\ \frac{U - U_Z}{r_Z} & U > U_Z \end{cases}$$

Ersatzschaltung: für $U \geq U_Z$



gesucht: U in Abhängigkeit von I

[…] wurde in der Vorlesung nicht mehr behandelt, aber in Übung … Lösung folgt in den nächsten Tagen!

Platzhalter

Kapitel 8

Elektrothermische Analogien

Analogie: Unterschiedliche physikalische Größen haben die gleiche Grundeigenschaft.

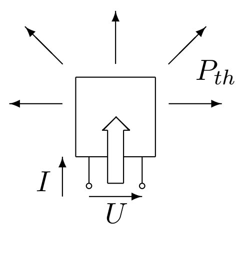
elektrohydraulische Analogie:

elektrischer Strom — hydraulischer Fluß

elektrische Spannung — Druckdifferenz

8.1 Thermischer Leistungsfluß und Temperaturdifferenz

8.1.1 Thermischer Leistungsfluß (Wärmestrom)

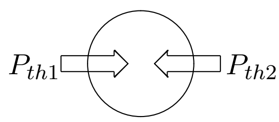


Von einer Wärmequelle geht ein Wärmestrom aus. Der gesamte Wärmestrom ist gleich der insgesamt zugeführten Leistung (im stationären Fall).

$$P_{th} = P_{el} = U \cdot I \qquad [P_{th}] = W$$

Grundeigenschaft: Kontinuität

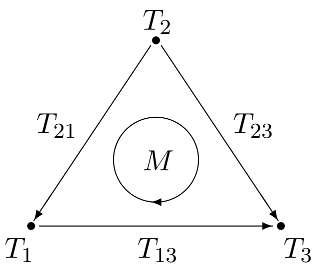
Im stationären Fall (d.h. keine Temperaturänderung mit der Zeit) ist der gesamte Wärmestrom durch eine geschlossene Hülle Null.



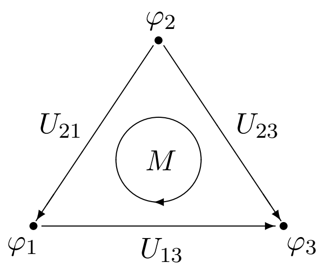
$$P_{th1} + P_{th2} = 0$$

$\longrightarrow$ Der Wärmestrom verhält sich wie der elektrische Strom (Kirchhoffsches Gesetz).

8.1.2 Temperaturdifferenz



$$T_{ij} = T_i - T_j$$
$$(i,\, j = 1,\, 2,\, 3,\; i \neq j)$$



$$U_{ij} = U_i - U_j$$
$$(i,\, j = 1,\, 2,\, 3,\; i \neq j)$$

$\circlearrowright M$:

$$\begin{aligned} -T_{13} - T_{21} + T_{23} &= 0 \\ -(T_1 - T_3) - (T_2 - T_1) + (T_2 - T_3) &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$\circlearrowright M$:

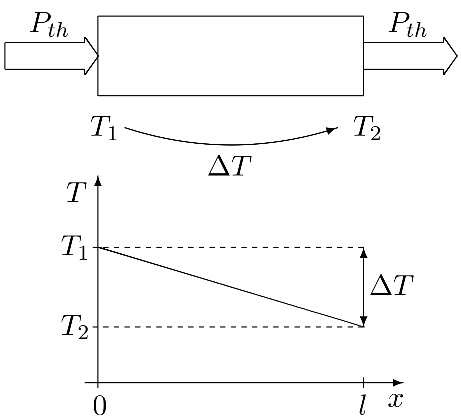
$$\begin{aligned} -U_{13} - U_{21} + U_{23} &= 0 \\ -(U_1 - U_3) - (U_2 - U_1) + (U_2 - U_3) &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Grundeigenschaft: Kirchhoffsches Spannungsgesetz
$\longrightarrow$ Die Temperaturdifferenz verhält sich wie die elektrische Spannung

8.2 Thermischer Widerstand

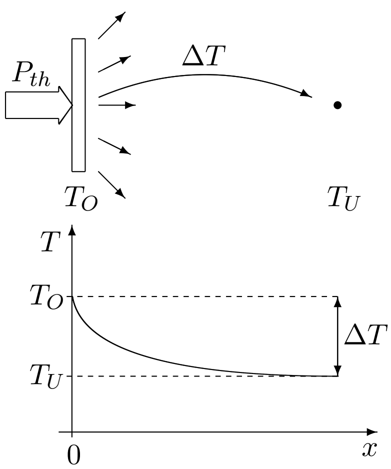
8.2.1 Definitionsgleichung

homogenes Strömungsfeld



Durchgangswiderstand

inhomogenes Strömungsfeld



Übergangswiderstand

$$\boxed{R_{th} = \frac{\Delta T}{P_{th}}}$$ Definition thermischer Widerstand

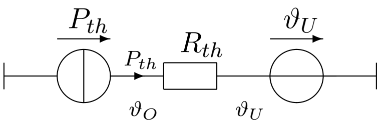
$$[R_{th}] = \frac{[T]}{[P]} = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$$

Beispiel: Elektrischer Plattenheizkörper (2 kW).

Oberflächentemperatur $\vartheta_O = 60°\,\mathrm{C} = 333\,\mathrm{K}$ bei Umgebungstemperatur $\vartheta_U = 18°\,\mathrm{C} = 291\,\mathrm{K}$.

Wie groß ist der thermische Widerstand?

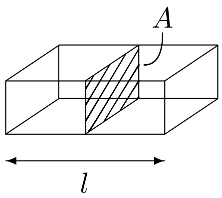
$$R_{th} = \frac{\Delta T}{P_{th}} = \frac{(\Delta\vartheta/°\,\mathrm{C})\cdot \mathrm{K}}{P_{th}} = \frac{42\,\mathrm{K}}{2\,\mathrm{kW}} = 21\cdot 10^{-3}\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$$



äquivalentes Netzwerk, thermische Ersatzschaltung

8.2.2 Wärmetransportmechanismen und Bemessungsgleichungen

1. Wärmeleitung



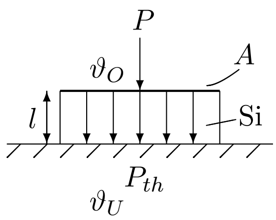
$$\boxed{R_{th} = \frac{l}{\lambda\cdot A}} \longleftrightarrow R_{el} = \frac{l}{\varkappa\cdot A}$$

Bemessungsgleichung (homogenes Feld)

λ — Wärmeleitfähigkeit

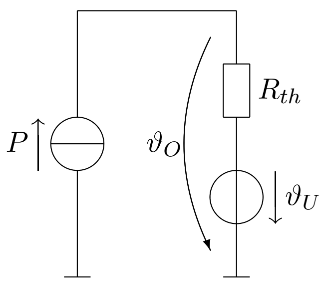
$$[\lambda] = \frac{[l]}{[R_{th}][l]^2} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}\cdot\mathrm{m}}$$

Beispiel: Elektronisches Bauelement mit idealer Kühlung



Wie groß darf P sein, wenn die Temperatur ϑ_O nicht größer als 120° C sein darf? ($\vartheta_U = 50°\,\mathrm{C}$, $l = 2\,\mathrm{mm}$, $A = 4\,\mathrm{mm}^2$, $\lambda = 4\cdot 10^{-6}\,\Omega/\mathrm{K}$).

$$\vartheta_O = \vartheta_U + R_{th}\cdot P$$

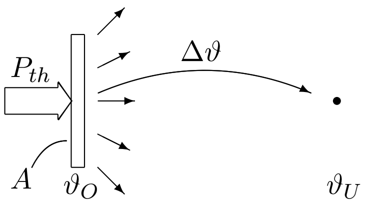


$$P \le \frac{\vartheta_O - \vartheta_U}{R_{th}} = \frac{\lambda\cdot A}{l}\cdot(\vartheta_O - \vartheta_U)$$

$$P \le 145\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}\cdot\mathrm{m}}\cdot\frac{4\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2}{2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}\cdot(120–30)\,\mathrm{K}$$

$$P \le 20{,}3\,\mathrm{W}$$

2. Konvektion (Wärmetransport durch bewegtes Medium)



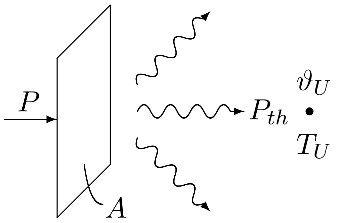
$$P_{th} = \alpha_K \cdot A \underbrace{(\vartheta_O - \vartheta_U)}_{\Delta\vartheta}$$

Ohmsches Gesetz

$$\vartheta_U \left[R_{thK} = \frac{\Delta\vartheta}{P_{th}} = \frac{1}{\alpha_K \cdot A} \right]$$

Bemessungsgleichung Übergangswiderstand

3. Wärmestrahlung: Wärmetransport ohne Medium



Stefan-Bolzmann-Gesetz

$$P_{th} = \underbrace{\sigma \cdot A \cdot {T_O}^4}_{\text{v. d. Platte abgeg.}} - \underbrace{\sigma \cdot A \cdot {T_U}^4}_{\text{v. d. Platte aufgen.}}$$

$$\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8} \, \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 \cdot K^4}}$$

σ : Stefan-Boltzmann-Konstante

Näherung

$$\begin{aligned}
T_O &= T_U + \Delta T \\
{T_O}^4 &= (T_U + \Delta T)^4 = {T_U}^4 \left(1 + \frac{\Delta T}{T_U}\right)^4 \\
{T_O}^4 &\overset{*}{\approx} {T_U}^4 \left(1 + 4 \cdot \frac{\Delta T}{T_U}\right) \\
{T_O}^4 - {T_U}^4 &\approx {T_U}^4 \left(1 + 4 \cdot \frac{\Delta T}{T_U}\right) - {T_U}^4 \\
{T_O}^4 - {T_U}^4 &\approx 4 \cdot {T_U}^3 \cdot \Delta T \\
P_{th} &\approx \underbrace{4 \cdot \sigma \cdot {T_U}^3}_{\alpha_{st}} \cdot A \cdot (T_O - T_U)
\end{aligned}$$

(*) : Näherung $(1 + x)^n = 1 + n \cdot x \qquad x \ll 1$

bei Raumtemperatur $T_U = 293\,\mathrm{K} \qquad \alpha = 6 \, \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 \cdot K}}$

4. Zusammenfassung Konvektion und Strahlung

$$
\begin{aligned}
P_{th} &= P_{th} + P_{st} = (\underbrace{\alpha_K + \alpha_{st}}_{\alpha}) \cdot A \cdot (T_O - T_U) \\
&= \alpha \cdot A \cdot (T_O - T_U) = \alpha \cdot A \cdot \Delta T = \alpha \cdot A \cdot (\vartheta_O - \vartheta_U) \\
R_{th} &= \frac{1}{\alpha \cdot A} \qquad\qquad \alpha: \text{ Wärmeübergangszahl}
\end{aligned}
$$

Richtwerte

$\alpha = 10\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 \cdot K}}$ Eigenkonvektion (ursprünglich ruhende Luft)

$\alpha = 100\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 \cdot K}}$ Luftkühlung, $v = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

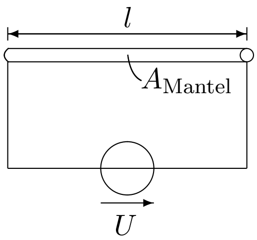
$\alpha = 10\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 \cdot K}}$ Wasserkühlung

8.2.3 Beispiele

1. Der Plattenheizkörper aus 8.2.1. hat eine Heizfläche von $2\,\mathrm{m}^2$. Wie groß ist α?

$$
R_{th} = \frac{1}{\alpha \cdot A} \qquad \alpha = \frac{1}{R_{th} \cdot A} = \frac{1}{21 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}} \cdot 2\,\mathrm{m}^2} = 23{,}8\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}}
$$

2. Aufheizung eines Heizdrahtes



$U = 5\,\mathrm{V}$ $\quad l = 5\,\mathrm{m}$ $\quad A_M = \pi \cdot d \cdot l$ $\quad A_Q = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$
spezifischer Widerstand bei Umgebungstemperatur $\vartheta_U = 20°\,\mathrm{C}$: $\varrho_0 = 1{,}4 \cdot 10^{-7}\,\Omega\mathrm{m}$ (Eisen)
$R = \varrho_0 \cdot \frac{l}{A_Q}(1 + \alpha_R \cdot \Delta T)$

Temperaturkoeffizient des spezifischen Widerstandes $\alpha_R = 4 \cdot 10^{-3} \cdot \mathrm{K}^{-1}$

Wärmeübergangszahl $\alpha_{th} = 10\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 \cdot K}}$ (Luftkühlung)

a) Wie groß wird die Temperatur ϑ_O des Drahtes?
b) Wie groß ist die im Draht umgesetzte Leistung?

$\Delta T = \vartheta_O - \vartheta_U = T_O - T_U$ (Übertemperatur des Drahtes)

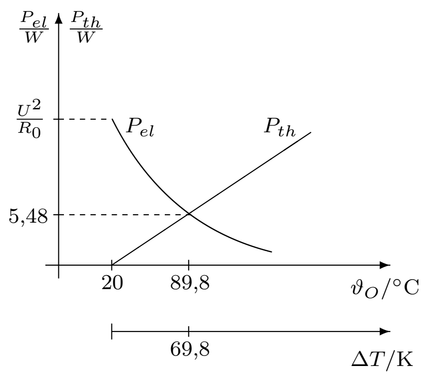
$$
\begin{aligned}
P_{el} &= P_{th} \\
\frac{U^2}{R} &= \frac{\Delta T}{R_{th}} = \alpha \cdot A_M \cdot \Delta T \\
\frac{U^2 \cdot \pi \cdot d^2}{\varrho_0 \cdot l \cdot 4(1 + \alpha_R \cdot \Delta T)} &= \alpha_{th} \cdot \pi \cdot d \cdot l \cdot \Delta T \\
\frac{U^2 \cdot d}{4\varrho_0 \cdot l^2 \cdot \alpha_{th}} &= (1 + \alpha_R \cdot \Delta T)\Delta T \\
\frac{U^2 \cdot d}{4\varrho_0 \cdot l^2 \cdot \alpha_{th}} &= \Delta T + \alpha_R \cdot \Delta T^2
\end{aligned}
$$

Alle Werte außer ΔT sind bekannt …

$$
\begin{aligned}
0 &= \Delta T^2 + \frac{1}{\alpha_R} \cdot \Delta T - \frac{U^2 \cdot d}{4 \cdot \varrho_0 \cdot l^2 \cdot \alpha_{th} \cdot \alpha_R} \\
\Delta T &= -\frac{1}{2 \cdot \alpha_R} + \sqrt{\frac{1}{4 \cdot \alpha_R} + \frac{U^2}{4\varrho_0 \cdot l^2 \cdot \alpha_{th} \cdot \alpha_R}} = 69{,}8\,\mathrm{K}
\end{aligned}
$$

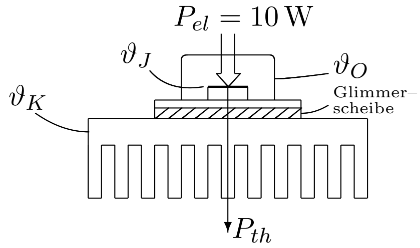
$\vartheta_O = \vartheta_U + \Delta T = 89{,}8°\mathrm{C}$

$P_{el} = P_{th} = 5{,}48\,\mathrm{W}$



8.3 Thermische Ersatzschaltung

Bemessungsbeispiel: Leistungstransistor auf Kühlkörper

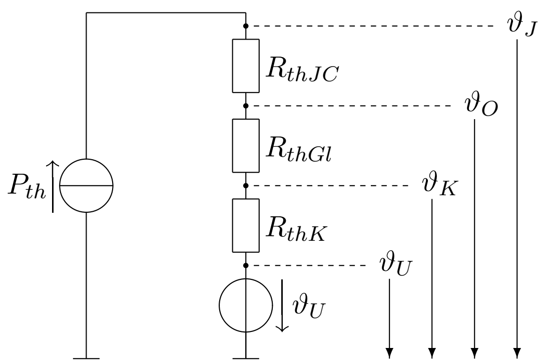


$R_{tjJC} = 2\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$

$R_{thGl} = 0{,}3\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$

Kühlkörper: $\alpha = 10\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 \cdot K}}$

a) $\vartheta_U = 50°\mathrm{C}$ $\quad \vartheta_J = 120°\mathrm{C}$. Welchen thermischen Widerstand muß der Kühlkörper besitzen?



Maschensatz:

$$P_{th}(R_{tjJC} + R_{thGl} + R_{thK}) + \vartheta_U - \vartheta_J = 0$$

$$R_{thK} = \underbrace{\frac{\vartheta_J - \vartheta_U}{P_{th}}}_{R_{th_{ges}}} - R_{thJC} - R_{thGl}$$

$$R_{thK} = \frac{70\mathrm{K}}{10\mathrm{W}} - 2\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}} - 0{,}3\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}} = 4{,}7\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$$