

Elektrotechnik III – WS 04/05
Prof. Dr.-Ing. Schwarz, TU Dresden
Mitschrift

Fabian Kurz
<http://fkurz.net/>

Zuletzt aktualisiert:
3. März 2005

Inhaltsverzeichnis

0	Dynamische Netzwerke	1
0.1	Problem	1
0.2	Klemmenverhalten der Grundschaltelemente	1
0.3	Netzwerk-Differentialgleichung	2
0.4	Lösung der Netzwerk-Differentialgleichung bei harmonischer Erregung	2
0.5	Bestimmung der stationären Lösung	3
0.6	Deutung von Gleichung (1) aus dem Netzwerk	4
1	Netzwerke bei harmonischer Erregung	5
1.1	Harmonische Zeitfunktionen	5
1.2	Zeigerdarstellung von harmonischen Funktionen	5
1.2.a	Komplexe Amplitude	6
1.2.b	Komplexer Effektivwert	6
1.3	Lineare Operationen mit harmonischen Funktionen	7
1.4	Verhalten der linearen Grundschaltelemente	8
1.5	Netzwerkanalyse bei harmonischer Erregung	9
1.5.a	Lösungsprogramm	9
2	Komplexe Zweipole	11
2.1	Komplexer Widerstand und komplexer Leitwert	11
2.1.a	Lineare Zweipole bei harmonischer Erregung	11
2.1.b	Definitionen:	11
2.1.c	Zusammenhänge	12
	Impedanz und Admittanz der Blindschaltelemente	13
2.1.d	Bestimmung von Impedanz und Admittanz	13
2.1.e	Beispiel	14
2.2	Ersatzschaltungen für komplexe Zweipole	15
2.2.a	Passiver Zweipol	15
2.2.b	Aktive Zweipole	17
3	Leistung bei Wechselstrom	18
3.1	Leistungsbegriffe	18
3.1.a	Momentanleistung	18
3.1.b	Wirkleistung	19
3.1.c	Blindleistung	19
3.1.d	Scheinleistung	19
3.2	Komplexe Leistung	20
3.2.a	Definition	20
3.2.b	Zusammenhang mit U und I	20
3.3	Leistungsübertragung im Grundstromkreis	20
3.3.a	(Wirk-)Leistungsübertragung	20

3.3.b	Blindleistungskompensation	21
3.3.c	Modelle technischer Bauelemente	23
3.3.d	Kleinverbraucher am Netz	23
4	Ortskurven	25
4.1	Grundbegriffe	25
4.2	Einfache Ortskurven	26
4.3	Inversion	27
4.3.a	Inversion eines Zeigers	27
4.3.b	Inversion von Ortskurven	28
4.3.c	Anwendungen	29
4.4	Frequenzgänge	30
4.5	Bode Diagramm	30
5	Resonanzkreise	32
5.1	Impedanz und Admittanz	32
5.2	Normierte Größen	34
5.2.a	Barkhausen-Verstimmung	34
5.2.b	45°-Frequenzen	35
5.2.c	Bandbreite	35
5.3	Strom- und Spannungsverläufe (Reihenschaltung)	35
6	Lineare Zweitore	37
6.1	Strom-Spannungsbeziehungen (Zweitorgleichungen)	37
6.1.a	Allgemeines	37
6.1.b	Widerstandsform der Zweitorgleichungen	37
6.1.c	Umrechnung von Zweitorparametern	38
6.2	Zusammenschaltung von Zweitoren	39
6.3	Klassifikation von Zweitoren	39
6.3.a	Umkehrbare Zweitore	39
6.3.b	Symmetrische Zweitore	40
6.4	Ersatzschaltungen	40
6.4.a	Problem	40
6.4.b	Allgemeine Zweipole	40
6.4.c	Zweitore mit durchgehender Masse (Dreipole)	41
7	Transformator (Übertrager)	42
7.1	Transformatorgleichungen und Ersatzschaltung	42
7.2	Vereinfachte Ersatzschaltung	43
7.3	Leistungsübertrager	44
7.3.a	Leerlaufversuch	44
7.3.b	Kurzschlußversuch	44
7.4	Signalübertrager: Frequenzverhalten	45
7.4.a	Grenzfrequenzen	46
8	Periodische Signale und Netzwerke bei periodischer Erregung	47
8.1	Periodische Signale	47
8.1.a	Definition: periodisches Signal	47
8.1.b	Signalkenngrößen	47
8.2	Spektraldarstellung periodischer Signale	48
8.2.a	Fourierentwicklung	48
8.2.b	Amplituden- und Phasenspektrum	49

8.2.c	Kenngrößen periodischer Signale im Frequenzbereich	49
8.3	Reaktion von Netzwerken auf periodische Signale	50
8.3.a	Grundprinzip	50
9	Schaltvorgänge	51
9.1	Zustandgleichungen	51
9.1.a	Algorithmus zur Ableitung der Zustandgleichungen aus einem Netzwerk .	51
9.1.b	Anwendungsbeispiel: Transistorschalter mit induktiver Last	52

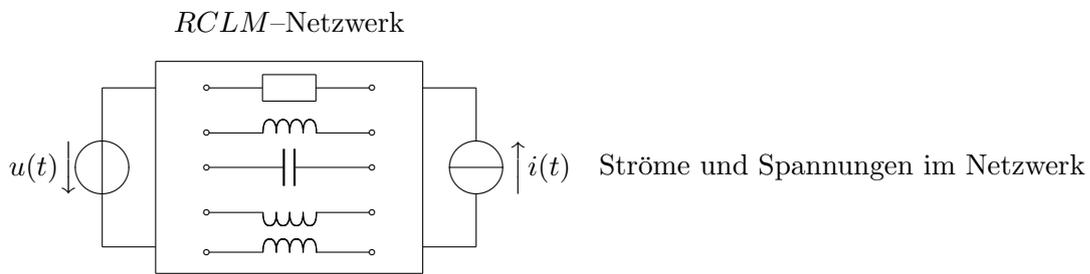
Kapitel 0

Dynamische Netzwerke

0.1 Problem

gegeben:

gesucht:

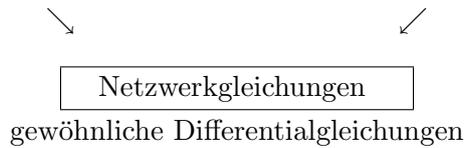


Schreibweise: $u = u(t)$, $i = i(t)$. Kleine Buchstaben bezeichnen zeitveränderliche Größen (Signale).

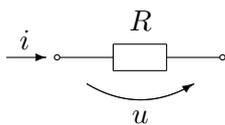
Netzwerkanalyse

Kirchhoffsche Gleichungen
Knotenspannungsanalyse
Maschenstromanalyse

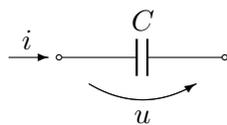
u - i -Relationen der Zweige



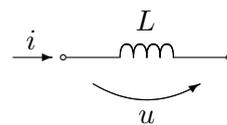
0.2 Klemmenverhalten der Grundschaltelemente



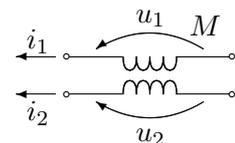
$$u = R \cdot i$$



$$i = C \cdot \frac{du}{dt}$$



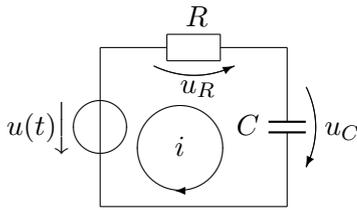
$$u = L \cdot \frac{di}{dt}$$



$$u_1 = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = M \cdot \frac{di_1}{dt} + L_2 \cdot \frac{di_2}{dt}$$

0.3 Netzwerk-Differentialgleichung



Kirchhoffsche Gleichungen

MS: $u_R + u_C - u = 0$

KS: $i_R = i_C = i$

gesucht: $u_C(t)$

$U-I$ -Relationen: $u_R = i \cdot R, \quad i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt}$

$$i \cdot R + u_C = u \Rightarrow \underbrace{C \cdot R}_{\tau} \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = u$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = u(t)} \quad (\tau = R \cdot C, u_C(0) = U_{C0})$$

Spezialfälle für $u(t)$

↙
harmonische Funktion

$$u = \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)$$

Netzwerke bei harmonischer Erregung

↓
periodische Funktion

$$u(t + k \cdot T) = u(t)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Netzwerk bei periodischer Erregung

↘
Sprungform

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ U_0 & t \geq 0 \end{cases}$$

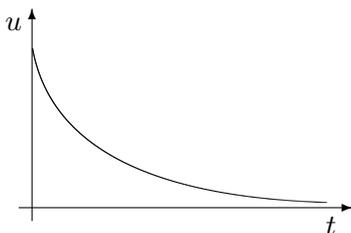
Schaltvorgänge

0.4 Lösung der Netzwerk-Differentialgleichung bei harmonischer Erregung

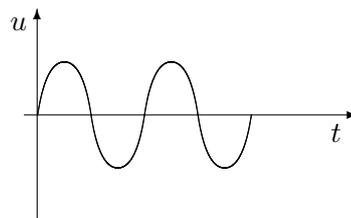
$$\tau \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) & t \geq 0 \end{cases} \quad u_C(0) = U_{C0}$$

$$u_C(t) = \underbrace{U_{C0} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{v. Anfangsw. abh.}} + \underbrace{\frac{\hat{U}}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cdot \cos(\varphi_u + \varphi) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}_{k \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty} + \underbrace{\frac{\hat{U}}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u + \varphi)}_{\text{von Erregung abhängig}} \cdot A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\varphi = \arctan \omega\tau$$



transiente Lösung

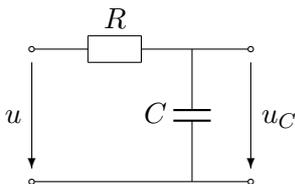


stationäre Lösung

Verhalten stabiler linearer Netzwerke (SLN)

- Wird auf ein SLN eine harmonische Erregung geschaltet, so sind nach einem Übergangsvorgang alle Ströme und Spannungen harmonische Zeitfunktionen
- Ist in einem SLN ein Signal (Strom oder Spannung) harmonisch, so sind alle anderen Signale im stationären Zustand auch harmonisch
- Interessiert nur der statische Fall, so braucht die Netzwerk-DGL nicht gelöst zu werden (symbolische Analyse)

0.5 Bestimmung der stationären Lösung



$$\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) \quad R \cdot C = \tau$$

gesucht: stationäre Lösung, $u_C(t)$ für große t

Prinzipielle Form: $u_C(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{u_C})$. Unbekannte: \hat{U} und φ_{u_C}

Komplexe Differentialrechnung:

$$\tau \frac{d\underline{u}_C}{dt} + \underline{u}_C = \hat{U} \cdot (\cos(\omega t + \varphi_u) + j \sin(\omega t + \varphi_u)) = \hat{U} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}$$

$$u_C(t) = \text{Re}(\underline{u}_C(t))$$

$$\tau \frac{d\underline{u}_C}{dt} + \underline{u}_C = \underbrace{\hat{U} \cdot e^{j\varphi_u}}_{\hat{U}} \cdot e^{j\omega t} = \underline{\hat{U}} e^{j\omega t}$$

Ansatz: $\underline{u}_C(t) = \underline{\hat{U}}_C \cdot e^{j\omega t} \quad \hat{U}_C = \hat{U} \cdot e^{j\varphi_{u_C}}$

$$\frac{d\underline{u}_C}{dt} = \underbrace{\underline{\hat{U}}_C \cdot e^{j\omega t}}_{\underline{u}_C} \cdot j\omega = j\omega \cdot \underline{u}_C$$

einsetzen:

$$\tau \cdot j\omega \cdot \underline{\hat{U}}_C \cdot e^{j\omega t} + \underline{\hat{U}}_C \cdot e^{j\omega t} = \underline{\hat{U}} \cdot e^{j\omega t} \quad | \cdot e^{-j\omega t}$$

$$\tau \cdot j\omega \cdot \underline{\hat{U}}_C + \underline{\hat{U}}_C = \underline{\hat{U}}$$

$$(j\omega\tau + 1) \cdot \underline{\hat{U}}_C = \underline{\hat{U}}$$

$$\underline{\hat{U}}_C = \frac{\underline{\hat{U}}}{1 + j\omega\tau} \quad (1)$$

(1) in Ansatz einsetzen:

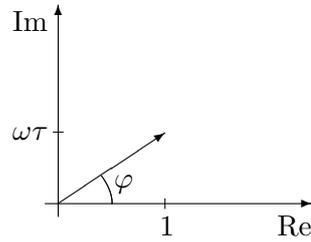
$$\begin{aligned} \underline{u}_C(t) &= \underline{\hat{U}}_C \cdot e^{j\omega t} = \frac{\underline{\hat{U}}}{1 + j\omega\tau} \cdot e^{j\omega t} \\ &= \frac{\hat{U} \cdot e^{j\varphi_u}}{1 + j\omega\tau} \cdot e^{j\omega t} \end{aligned}$$

Reeller Anteil:

$$u_C(t) = \operatorname{Re}(\underline{u}_C(t)) = \operatorname{Re}\left(\frac{\hat{U} \cdot e^{j\varphi_C}}{1 + j\omega\tau} \cdot e^{j\omega t}\right)$$

$$1 + j\omega\tau = \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \cdot e^{j\varphi}$$

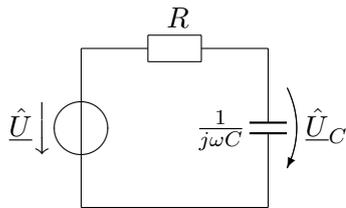
$$\varphi = \arctan \frac{\omega\tau}{1}$$



$$u_C(t) = \operatorname{Re}\left(\frac{\hat{U} \cdot e^{j\varphi_u}}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \cdot e^{j\varphi}} \cdot e^{j\omega t}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{\hat{U}}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u - \varphi)}\right)$$

$$= \frac{\hat{U}}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u - \arctan \omega\tau)$$

0.6 Deutung von Gleichung (1) aus dem Netzwerk



$$\underline{U}_C = \frac{\hat{U}}{1 + j\omega R \cdot C} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \hat{U}$$

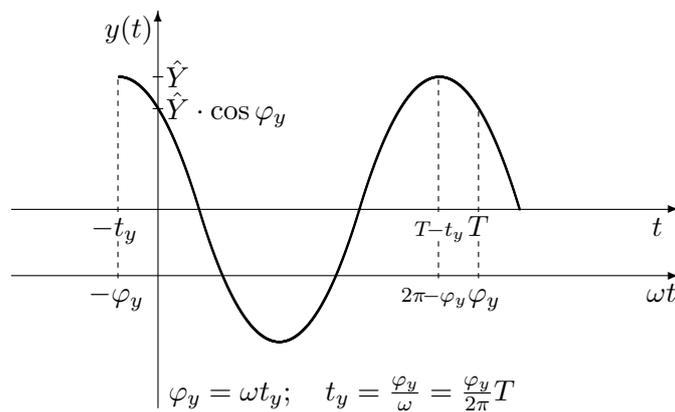
\underline{U}_C kann aus einem symbolischen Gleichstromnetzwerk berechnet werden. Aufstellen und Lösen der Netzwerk-Differentialgleichung ist nicht erforderlich.

Kapitel 1

Netzwerke bei harmonischer Erregung

1.1 Harmonische Zeitfunktionen

$$y(t) = \hat{Y} \cdot \cos(\omega t + \varphi_y) = \hat{Y} \cdot \cos(\omega(t - t_y))$$



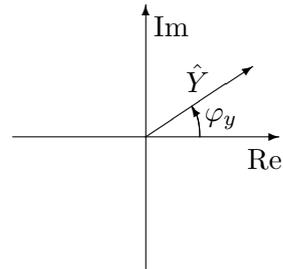
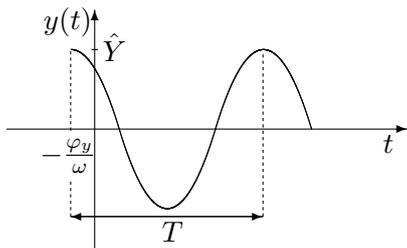
Kenngrößen

Wertkenngrößen		Zeitkenngrößen	
\hat{Y}	Spitzenwert, Amplitude	T	Periodendauer, Periode
$Y_{SS} = 2 \cdot \hat{Y}$	Spitze-Spitze-Wert	$f = \frac{1}{T}$	Frequenz
$Y = \frac{\hat{Y}}{\sqrt{2}}$	Effektivwert	$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$	Kreisfrequenz
		φ_y	Phasenwinkel, Phase

1.2 Zeigerdarstellung von harmonischen Funktionen

Bei gegebener Frequenz (f bzw. T bzw. ω) kann einer harmonischen Zeitfunktion ein Zeiger (Phasor) zugeordnet werden.

1.2.a Komplexe Amplitude



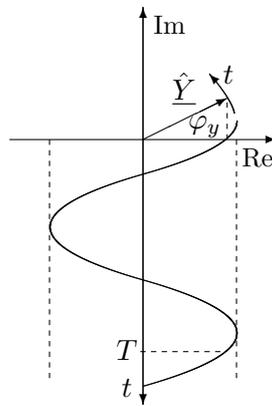
$$y(t) = \hat{Y} \cdot \cos(\omega t + \varphi_y)$$

$$\underline{\hat{Y}} = \hat{Y} \cdot e^{j\varphi_y} = \hat{Y} \cdot (\cos \varphi_y + j \sin \varphi_y)$$

Umkehrung:

$$y(t) = \text{Re}(\underline{\hat{Y}} \cdot e^{j\omega t}) = \text{Re}(\hat{Y} \cdot e^{j\varphi_y} \cdot e^{j\omega t})$$

geometrische Deutung von $\text{Re}(\underline{\hat{Y}} \cdot e^{j\omega t})$:



1.2.b Komplexer Effektivwert

$$\underline{Y} = \frac{\underline{\hat{Y}}}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{Y}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi_y}$$

Definition komplexer Effektivwert

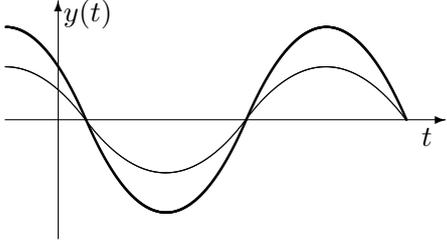
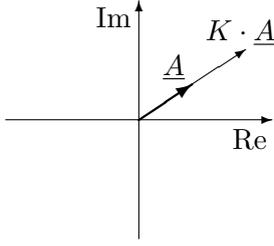
Wird nachfolgend verwendet!

1.3 Lineare Operationen mit harmonischen Funktionen

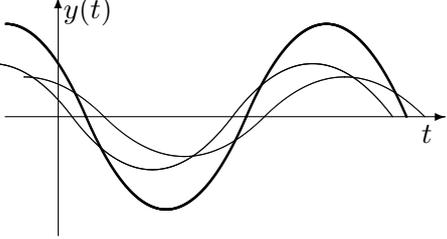
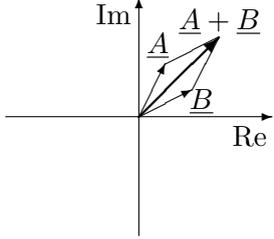
Motivation: In linearen Differentialgleichungen treten drei lineare Operationen auf:

$$\underbrace{\tau}_{①} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{②} + \underbrace{y}_{③} = x$$

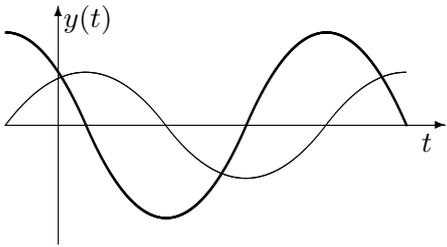
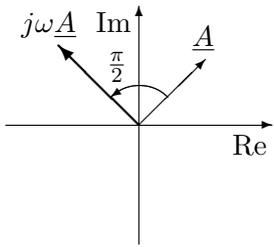
1. Multiplikation mit konstantem Faktor

Zeitbereich	Bildbereich
$K \cdot A \cdot \cos(\omega + \varphi)$	$K \cdot \underline{A} = K \cdot A \cdot e^{j\varphi}$
	

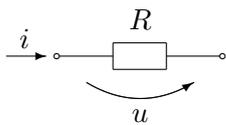
2. Addition

$A \cdot \cos(\omega t + \varphi_A) + B \cdot \cos(\omega t + \varphi_B)$	$\underline{A} + \underline{B} = A \cdot e^{j\varphi_A} + B \cdot e^{j\varphi_B}$
	

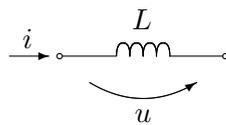
3. Differentiation

$\frac{d}{dt}(A \cos(\omega t + \varphi)) = \omega \cdot A \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$	$j\omega \cdot \underline{A} = \omega \cdot A \cdot e^{j(\omega + \pi/2)}$
	

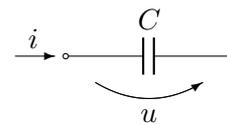
1.4 Verhalten der linearen Grundschaltelemente



$$u = R \cdot i$$



$$u = L \cdot \frac{di}{dt}$$



$$i = C \cdot \frac{du}{dt}$$

$$i(t) = \hat{I} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$u(t) = R \cdot \hat{I} \cos(\omega t + \varphi_i) \quad u(t) = \omega L \cdot \hat{I} \cos\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right) \quad u(t) = \frac{1}{\omega C} \cdot \hat{I} \cos\left(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\hat{U} = R \cdot \hat{I}$$

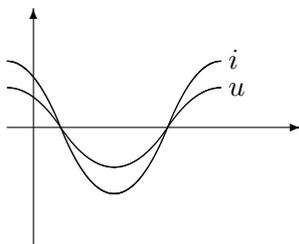
$$\hat{U} = \omega L \cdot \hat{I}$$

$$\hat{U} = \frac{1}{\omega C} \cdot \hat{I}$$

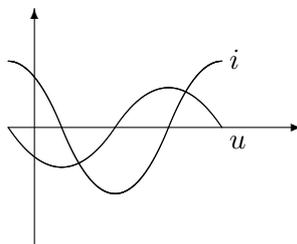
$$\varphi_u = \varphi_i$$

$$\varphi_u = \varphi_i + \frac{\pi}{2}$$

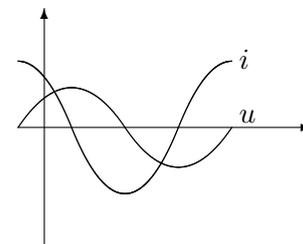
$$\varphi_u = \varphi_i - \frac{\pi}{2}$$



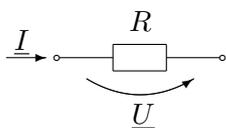
u und i in Phase



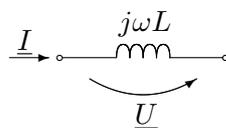
u eilt i um $\frac{\pi}{2}$ (90°) vor



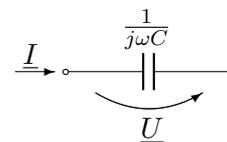
u eilt i um $\frac{\pi}{2}$ (90°) nach



$$\underline{U} = R \cdot \underline{I}$$



$$\underline{U} = j\omega L \cdot \underline{I}$$



$$\underline{U} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I}$$

$$\underline{I} = I \cdot e^{j\varphi_i}$$

$$U = R \cdot I$$

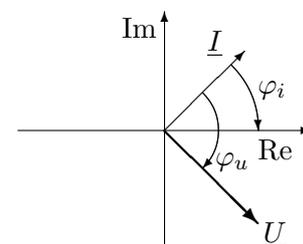
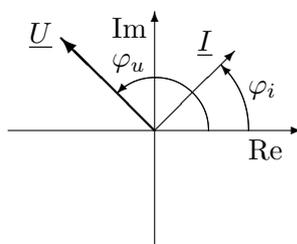
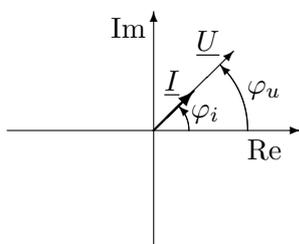
$$U = \omega L \cdot I$$

$$U = \frac{1}{\omega C} \cdot I$$

$$\varphi_u = \varphi_i$$

$$\varphi_u = \varphi_i + \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_u = \varphi_i - \frac{\pi}{2}$$



1.5 Netzwerkanalyse bei harmonischer Erregung

(Symbolische Methode, $j\omega$ -Rechnung)

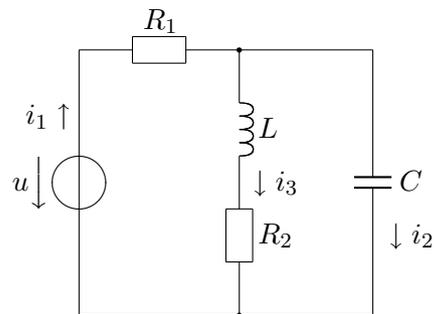
gegeben:

Netzwerk, harmonische Erregung

gesucht:

Ströme Spannungen im stationären Fall

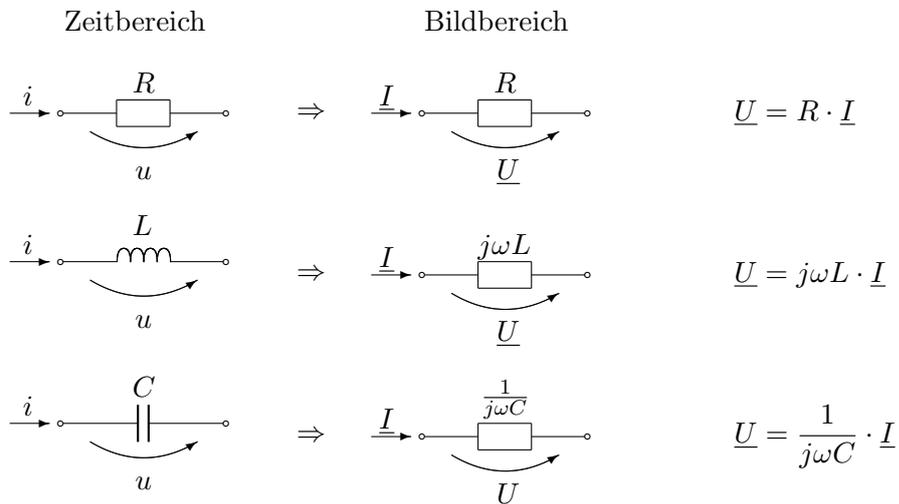
Beispiel:



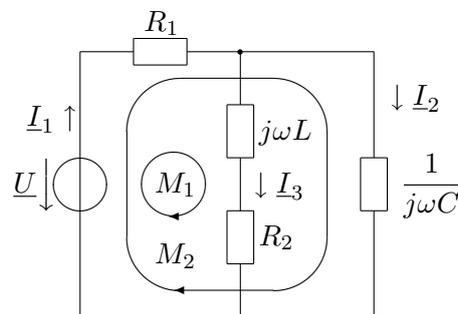
Beispiel: gegeben: $u(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)$, gesucht: $i_3 = \hat{I}_3 \cdot \cos(\omega t + \varphi_{i_3})$

1.5.a Lösungsprogramm

1. Transformation des Netzwerkes in den Bildbereich



Ergebnis: Gleichstromnetzwerk mit komplexen Größen



2. Berechnen der gesuchten Größen im Bildbereich

Analyse eines komplexen Gleichstromnetzwerkes (Maschensatz):

$$\begin{aligned}
 M_1 : & \quad (R_1 + R_2 + j\omega L) \cdot \underline{I}_3 + R_1 \cdot \underline{I}_2 = \underline{U} \\
 M_2 : & \quad R_1 \cdot \underline{I}_3 + \left(R_1 + \frac{1}{j\omega C} \right) \cdot \underline{I}_2 = \underline{U}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{I}_3 = \frac{R_1 + \frac{1}{j\omega C} - R_1}{(R_1 + R_2 + j\omega L) \left(R_1 + \frac{1}{j\omega C} \right) - R_1^2} \cdot \underline{U} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{R_1 + R_2}{j\omega C} + R_1 R_2 + R_1 j\omega L + \frac{L}{C}} \cdot \underline{U}$$

$$\underline{I}_3 = I_3 \cdot e^{j\varphi_{i3}} = \frac{\underline{A}}{\underline{B}} \cdot \underline{U} \quad \underline{A} = \frac{1}{j\omega C}, \quad \underline{B} = \frac{R_1 + R_2}{j\omega C} + R_1 R_2 + R_1 j\omega L + \frac{L}{C}$$

$$I_3 \cdot e^{j\varphi_{i3}} = \frac{A \cdot e^{j\varphi_A}}{B \cdot e^{j\varphi_B}} \cdot U \cdot e^{j\varphi_u} = \underbrace{\frac{A}{B}}_{I_3} \cdot \underbrace{e^{j(\varphi_u + \varphi_A - \varphi_B)}}_{\varphi_{i3}}$$

$$A = \frac{1}{\omega C}, \quad \varphi_A = \frac{1}{j} = -\frac{\pi}{2}$$

$$B = \sqrt{\left(R_1 R_2 + \frac{L}{C}\right)^2 + \left(\omega L R_1 - \frac{R_1 + R_2}{\omega C}\right)^2}, \quad \varphi_B = \arctan \frac{\omega L R_1 - \frac{R_1 + R_2}{\omega C}}{R_1 R_2 + \frac{L}{C}}$$

$$\boxed{I_3 = \frac{A}{B} \cdot U, \quad \varphi_{i3} = \varphi_u + \varphi_A - \varphi_B}$$

3. Rücktransformation in den Zeitbereich

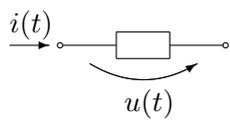
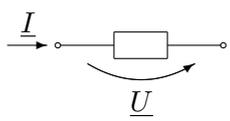
$$i_3(t) = \operatorname{Re} \left(\sqrt{2} \cdot \underline{I} \cdot e^{j\omega t} \right) = \underbrace{I_3 \cdot \sqrt{2}}_{\hat{I}_3} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{i3})$$

Kapitel 2

Komplexe Zweipole

2.1 Komplexer Widerstand und komplexer Leitwert

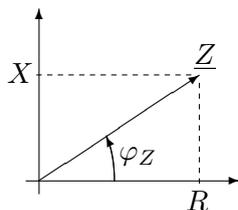
2.1.a Lineare Zweipole bei harmonischer Erregung

Zeitbereich	Bildbereich
lineares Netzwerk (ZP aus R, C, L, M , gest. Quellen)	komplexer Zweipol
	
$u(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)$	$\underline{U} = U \cdot e^{j\varphi_u}, \quad U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$
$i(t) = \hat{I} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$	$\underline{I} = I \cdot e^{j\varphi_i}, \quad I = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$

2.1.b Definitionen:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$

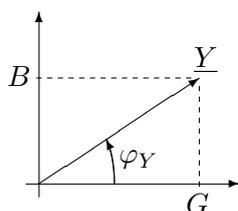
Komplexer Widerstand (Impedanz)



Kartesische Koordinaten	Polarkoordinaten
$\underline{Z} = R + jX$	$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi_z}$
Wirkwiderstand, Resistanz	Scheinwiderstand
$X = \text{Im}(\underline{Z}) = Z \sin \varphi_z$	$\varphi_z = \arg(\underline{Z}) = \varphi_u - \varphi_i$
Blindwiderstand, Reaktanz	Phase der Impedanz

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}$$

Komplexer Leitwert (Admittanz)



Kartesische Koordinaten	Polarkoordinaten
$\underline{Y} = G + jB$	$\underline{Y} = Y \cdot e^{j\varphi_y}$
Wirkleitwert, Konduktanz	Scheinleitwert
$Y = \text{Im}(\underline{Y}) = Y \sin \varphi_y$	$\varphi_y = \arg(\underline{Y}) = \varphi_i - \varphi_u$
Blindleitwert, Suszeptanz	Phase der Admittanz

Wichtig: Die Bildung des Quotienten ist nur im Bildbereich sinnvoll. Im Zeitbereich sind die Quotienten $\frac{u(t)}{i(t)}$ und $\frac{i(t)}{u(t)}$ zeitabhängige Größen ohne Aussagekraft.

2.1.c Zusammenhänge

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} \qquad \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

Kartesische Koordinaten:

$$R + jX = \frac{1}{G + jB} = \frac{G - jB}{G^2 + B^2} = \frac{G}{G^2 + B^2} - j \frac{B}{G^2 + B^2}$$

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} \qquad X = -\frac{B}{G^2 + B^2}$$

$$G + jB = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2}$$

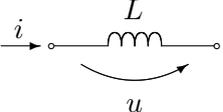
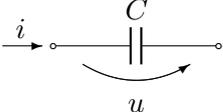
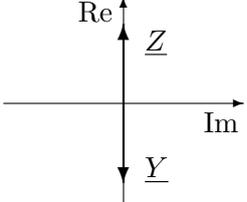
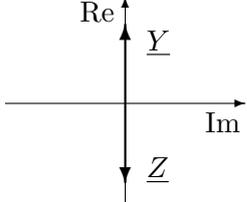
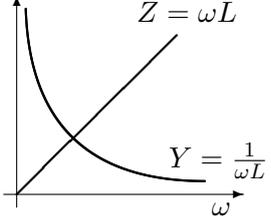
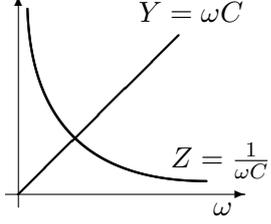
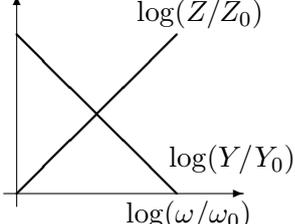
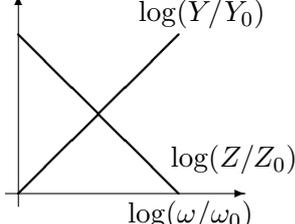
$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \qquad B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$$

Polarkoordinaten

$$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi_z} \qquad \underline{Y} = Y \cdot e^{j\varphi_y}$$

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} \longrightarrow Z \cdot e^{j\varphi_z} = \frac{1}{Y \cdot e^{j\varphi_y}} = \frac{1}{Y} \cdot e^{-j\varphi_y} \Rightarrow Z = \frac{1}{Y}, \quad \varphi_z = -\varphi_y$$

Impedanz und Admittanz der Blindschaltelemente

Schaltelement		
Impedanz	$\underline{Z} = j\omega L$	$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$
Betrag	$Z = \omega L$	$Z = \frac{1}{\omega C}$
Phase	$\varphi_Z = \frac{\pi}{2}$	$\varphi_Z = -\frac{\pi}{2}$
Admittanz	$\underline{Y} = \frac{1}{j\omega L} = -j\frac{1}{\omega L}$	$\underline{Y} = j\omega C$
Betrag	$Y = \frac{1}{\omega L}$	$Y = \omega C$
Phase	$\varphi_Y = -\frac{\pi}{2}$	$\varphi_Y = \frac{\pi}{2}$
Zeigerbilder		
Frequenzgang des Betrages		
Frequenzgang in doppeltlogarithm. Darstellung		

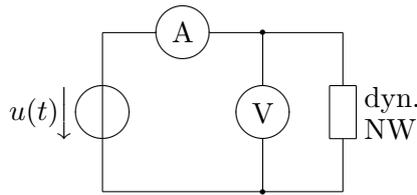
2.1.d Bestimmung von Impedanz und Admittanz

1. Aus den Zeitverläufen von u und i

$$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi} = \frac{U}{I} = \frac{U \cdot e^{j\varphi_u}}{I \cdot e^{j\varphi_i}} = \frac{U}{I} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

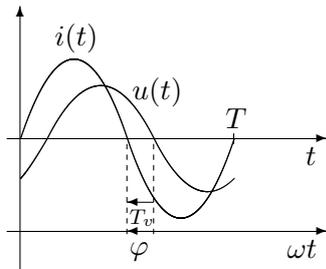
$$\Rightarrow Z = \frac{U}{I}, \quad \varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

Betrag (Scheinleitwert, Scheinwiderstand): Durch Effektivwertmessung



$$Z = \frac{U}{I}, \quad Y = \frac{I}{U}$$

Phase: Durch Zeitmessung (Oszilloskop)

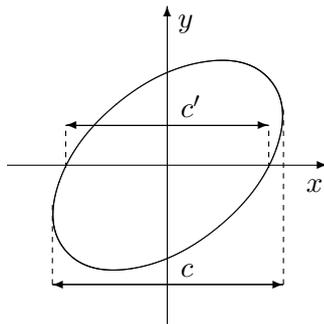


$$T_v = \frac{\varphi_u - \varphi_i}{\omega} = \frac{\varphi}{\omega} \quad \frac{T_v}{T} = \frac{\varphi}{2\pi}$$

$$\varphi = \begin{cases} 2\pi \cdot \frac{T_v}{T} = 2\pi \cdot f \cdot T_v & \text{in Radiant} \\ 360^\circ \cdot \frac{T_v}{T} = 360^\circ \cdot f \cdot T_v & \text{in Grad} \end{cases}$$

$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$, φ ist positiv, wenn u voreilt (*induktiv*), negativ, wenn i voreilt (*kapazitiv*).

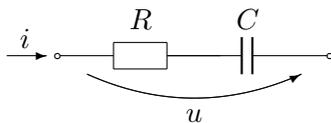
Phasenmessung mit Lissajous-Figur: (x - y -Oszilloskop, $x = u(t)$, $y = i(t)$)



$$|\sin \varphi| = \frac{c'}{c}$$

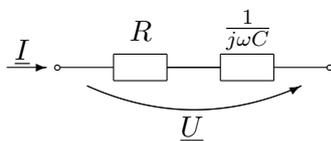
(komplette Herleitung: <http://www.iee.et.tu-dresden.de/iee/ge/student/materialien/ET-III/folien/lissajous.pdf>)

2.1.e Beispiel



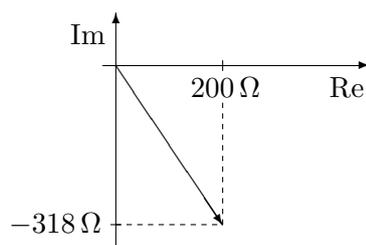
gegeben: $R = 200 \Omega$, $C = 100 \text{ nF}$, $f = 5 \text{ kHz}$

gesucht: \underline{Z} , \underline{Y} in allen Formen



$$\underline{Z} = R + \frac{1}{j\omega C} = R + jX \quad R = 200 \Omega$$

$$X = -\frac{1}{\omega C} = \frac{1 \cdot \text{s} \cdot \text{V}}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-9} \cdot \text{As}} = -318 \Omega$$



$$\underline{Z} = 200 \Omega - j 318 \Omega = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} \cdot e^{j \arctan \frac{1}{\omega RC}}$$

$$= 376 \Omega \cdot e^{-j 58^\circ}$$

$$\text{Re}(\underline{Z}) = 200 \Omega, \quad \text{Im}(\underline{Z}) = -318 \Omega, \quad Z = 376 \Omega, \quad \varphi = -58^\circ$$

Leitwert:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{376} \Omega \cdot e^{j58^\circ} = 2,66 \text{ mS} \cdot e^{j58^\circ} = 2,66 \text{ mS} \cdot (\cos 58^\circ + j \sin 58^\circ) = 1,41 \text{ mS} + j 2,26 \text{ mS}$$

$$\text{Re}(\underline{Y}) = 1,41 \Omega, \text{Im}(\underline{Y}) = 2,26 \Omega, Y = 2,66 \Omega, \varphi_Y = 58^\circ$$

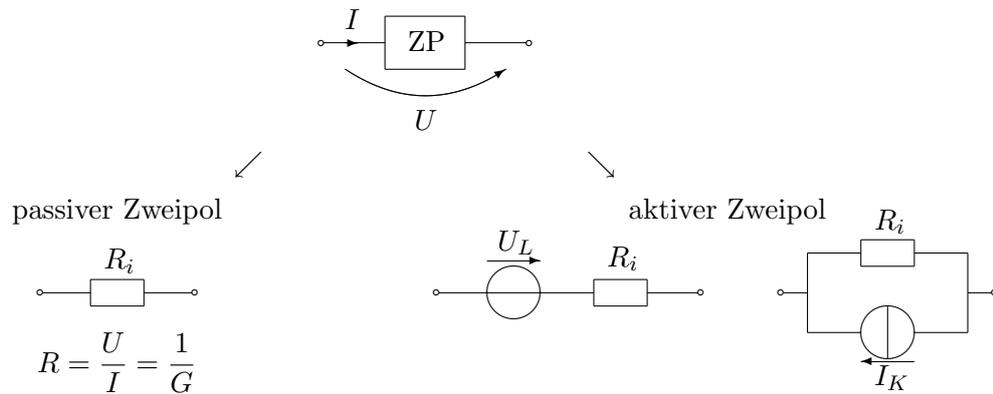
Strom:

$$\underline{I} = \frac{U}{\underline{Z}} = U \cdot \underline{Y} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \cdot 2,66 \text{ mS} \cdot e^{j58^\circ} = 1,88 \text{ mA} \cdot e^{j58^\circ}$$

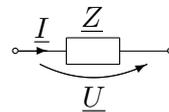
$$I = 1,88 \text{ mA}, \varphi_i = 58^\circ, \hat{I} = \sqrt{2} \cdot I = 2,66 \text{ mA}, i(t) = 2,66 \text{ mA} \cdot \cos(\omega t + 58^\circ)$$

2.2 Ersatzschaltungen für komplexe Zweipole

In Gleichstromnetzwerken:



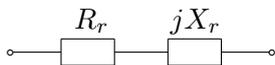
2.2.a Passiver Zweipol



$$\underline{Z} = \frac{U}{I} = \frac{1}{\underline{Y}}$$

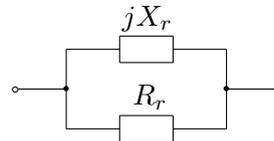
$$\underline{Z} = R_r + jX_r$$

Seriensersatzschaltung



$$\underline{Y} = G_p + jB_p$$

Parallelersatzschaltung



$X_r < 0$	$X_r > 0$
$jX_r = \frac{1}{j\omega C_r}$	$jX_r = j\omega L_r$
$C_r = -\frac{1}{\omega X_r}$	$L_r = \frac{X_r}{\omega}$

$B_p < 0$	$B_p > 0$
$jB_p = \frac{1}{j\omega L_p}$	$jB_p = j\omega C_p$
$L_p = -\frac{1}{\omega B_p}$	$C_p = \frac{B_p}{\omega}$

Beispiele

1. gegeben: Zweipol mit $U = 230 \text{ V}$, $I = 1 \text{ A}$, $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 15^\circ \hat{=} \frac{\pi}{12}$

Reihenersatzschaltung: $\underline{Z} = \frac{U}{I} = U \cdot e^{j\varphi} = Z \cdot \cos \varphi + jZ \cdot \sin \varphi = R_r + jX_r$

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{230 \text{ V}}{1 \text{ A}} = 230 \Omega \rightarrow R_r = Z \cdot \cos \varphi = 230 \Omega \cdot \cos \frac{\pi}{12} = 222 \Omega$$

$$\rightarrow X_r = Z \cdot \sin \varphi = 230 \Omega \cdot \sin \frac{\pi}{12} = 59,5 \Omega$$

$$X_r = \omega L_r \Rightarrow L_r = \frac{X_r}{\omega} = \frac{Z \cdot \sin \varphi}{2\pi f} = 189,5 \text{ mH} \Rightarrow \begin{array}{c} 222 \Omega \\ \square \\ 189,5 \text{ mH} \\ \text{---} \end{array}$$

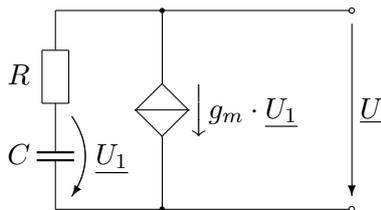
Parallelersatzschaltung: $\underline{Y} = \frac{I}{U} = Y \cdot e^{-j\varphi} = Y \cdot \cos -jY \cdot \sin \varphi = G_p + jB_p$

$$Y = \frac{I}{U} = 4,35 \text{ mS} \rightarrow G_p = Y \cdot \cos \varphi = 4,35 \text{ mS} \cdot \cos \frac{\pi}{12} = 4,2 \text{ mS} = \frac{1}{238 \Omega}$$

$$\rightarrow B_p = -Y \cdot \sin \varphi = -4,35 \text{ mS} \cdot \sin \frac{\pi}{12} = -1,12 \text{ mS}$$

$$B_p = -\frac{1}{\omega L_p} \Rightarrow L_p = -\frac{1}{\omega B_p} = \frac{1}{2\pi f Y \sin \varphi} = 2,83 \text{ H} \Rightarrow \begin{array}{c} 238 \Omega \\ \square \\ 2,83 \text{ H} \\ \text{---} \end{array}$$

2. gesucht: Parallelersatzschaltung folgender Schaltung:



$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + \frac{1}{j\omega C}} + g_m \cdot \underline{U}_1 \quad \underline{U}_1 = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \underline{U} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \cdot \underline{U}$$

$$\underline{I} = \underline{U} \cdot \left(\frac{j\omega C}{1 + j\omega RC} + \frac{g_m}{1 + j\omega RC} \right)$$

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{j\omega C + g_m}{1 + j\omega RC} = \frac{(j\omega C + g_m) \cdot (1 - j\omega RC)}{1 + (\omega RC)^2} = \underbrace{\frac{(\omega C)^2 R + g_m}{1 + (\omega RC)^2}}_{= \frac{1}{R_p}} + \underbrace{\frac{j\omega C \cdot (1 - g_m R)}{1 + (\omega RC)^2}}_{= \frac{1}{j\omega L_p} \text{ f\"ur } g_m R > 1}$$

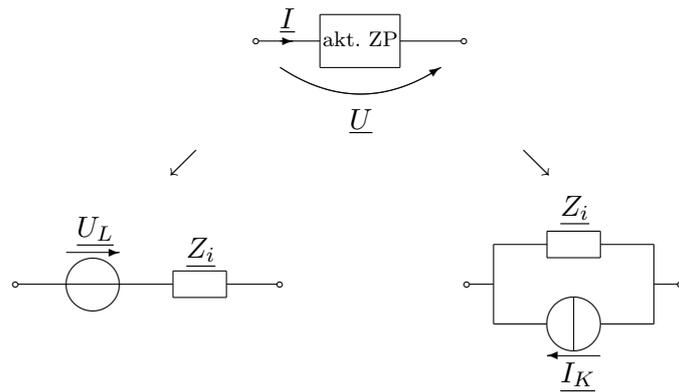
$$\omega L_p = -\frac{1}{\omega C} \cdot \frac{1 + (\omega RC)^2}{1 - g_m R} \Rightarrow L_p = \frac{1}{\omega^2 C} \cdot \frac{1 + (\omega RC)^2}{1 - g_m R}, \quad R_p = R \cdot \frac{1 + (\omega RC)^2}{g_m R + (\omega RC)^2}$$

Zahlenwerte: $R = 1 \text{ k}\Omega$, $g_m = 10 \text{ mS}$, $C = 1 \mu\text{F}$, $f = 500 \text{ Hz}$

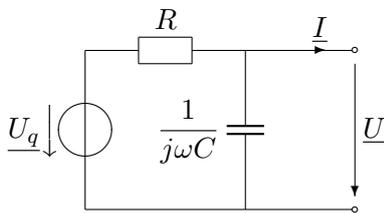
$$\omega RC = 2\pi \cdot 500 \text{ s}^{-1} \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{A}} \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{V}} = \pi, \quad g_m \cdot R = 10 \text{ mS} \cdot 1 \text{ k}\Omega = 10$$

$$\Rightarrow R_p = 547 \Omega, \quad L_p = 122 \text{ mH}$$

2.2.b Aktive Zweipole



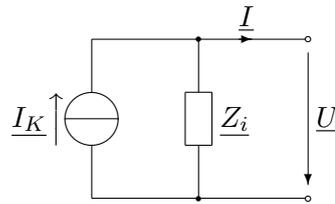
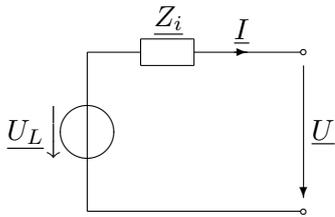
Beispiel:



Spannungsquellenersatzschaltung

$$\underline{U}_q = U_q \cdot e^{j\varphi_{uq}}$$

Stromquellenersatzschaltung



$$\begin{aligned} \underline{U}_L &= \underline{U} \Big|_{I=0} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \cdot U_q \\ &= \frac{1}{1 + j\omega RC} \cdot U_q \cdot e^{j\varphi_{uq}} \\ &= \frac{U_q}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cdot e^{j(\omega_{uq} - \arctan \omega RC)} \end{aligned}$$

$$\underline{I}_K = \underline{I} \Big|_{U=0} = \frac{U_q}{R} = \frac{U_q}{R} \cdot e^{j\varphi_{uq}}$$

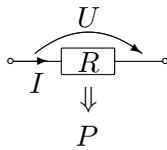
$$\underline{Z}_i = \frac{\underline{U}_L}{\underline{I}_K} \quad \text{bzw.} \quad \underline{Z}_i = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \Big|_{\text{Quellen}=0}$$

$$\underline{Z}_i = \frac{1}{j\omega R} \parallel R = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} = \frac{R}{1 + j\omega RC} = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cdot e^{-j \arctan \omega RC}$$

Kapitel 3

Leistung bei Wechselstrom

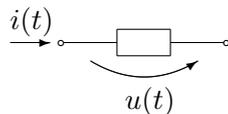
Bei Gleichstrom:



$$P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = I^2 \cdot R$$

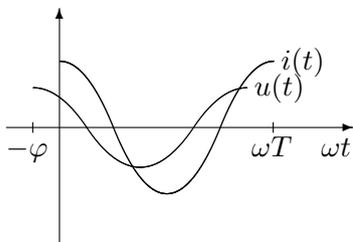
3.1 Leistungsbegriffe

3.1.a Momentanleistung



$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

Def.: Momentanleistung



$$u(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$i(t) = \hat{I} \cdot \cos(\omega t)$$

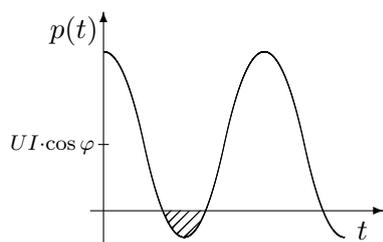
$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot \cos(\omega t)$$

Additionstheorem: $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$

$$\Rightarrow p(t) = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} \cdot [\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi)]$$

mit $U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$ und $I = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$:

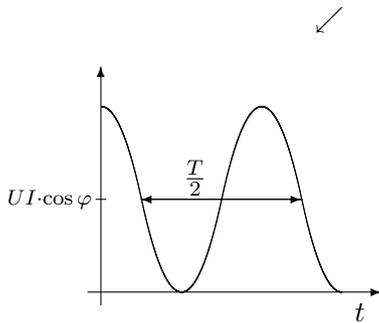
$$p(t) = U \cdot I \cdot [\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi)]$$



- Sinusförmig, aber mit 2ω
- $p(t)$ kann Negativ werden (schraffiert)
- weitere Zerlegung aufschlußreich

Additionstheorem: $\cos(2\omega t + \varphi) = \cos 2\omega t \cdot \cos \varphi - \sin 2\omega t \cdot \sin \varphi$

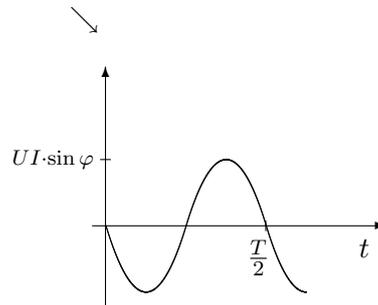
$$\Rightarrow p(t) = U \cdot I \cdot \cos \varphi \cdot (1 + \cos 2\omega t) - U \cdot I \cdot \sin \varphi \cdot \sin 2\omega t$$



Strom pulsierend in den Zweipol

$$\left. \begin{array}{l} \text{Mittelwert} \\ \text{Amplitude} \end{array} \right\} U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

\Rightarrow Wirkleistung

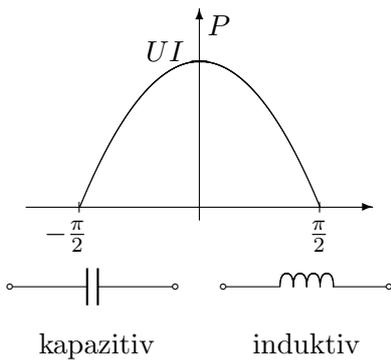


Strom pendelt zwischen Erzeuger und Verbraucher

$$\begin{array}{l} \text{Mittelwert: } 0 \\ \text{Amplitude: } U \cdot I \cdot \sin \varphi \end{array}$$

\Rightarrow Blindleistung

3.1.b Wirkleistung

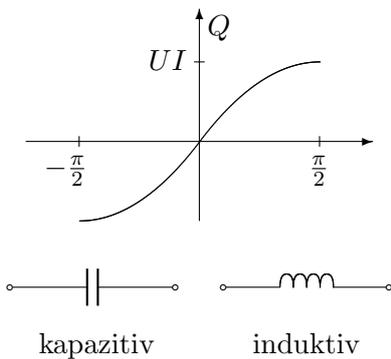


Die Wirkleistung ist der zeitliche Mittelwert der Momentanleistung.

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi, \quad [P] = [U] \cdot [I] = 1 \text{ W}$$

Sie hängt vom *Leistungsfaktor* $\cos \varphi$ ab. Bei $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ (reine Kapazität) und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (reine Induktivität) beträgt die Wirkleistung Null.

3.1.c Blindleistung



Die Blindleistung ist die Amplitude der zwischen Erzeuger und Verbraucher periodisch ausgetauschten Leistung

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi$$

$$[Q] = 1 \text{ var} \quad (\text{Voltampere reaktiv})$$

3.1.d Scheinleistung

Die Scheinleistung ist das Produkt der Effektivwerte von Strom und Spannung

$$S = U \cdot I \quad [S] = 1 \text{ VA}$$

3.2 Komplexe Leistung

3.2.a Definition

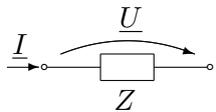
$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi, \quad Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi$$

$$\boxed{\underline{S} = P + jQ} \quad \text{Definition komplexe Leistung}$$

$$\underline{S} = U \cdot I \cdot (\cos \varphi + j \sin \varphi) = U \cdot I \cdot e^{j\varphi} = S \cdot e^{j\varphi}$$

$$|\underline{S}| = S = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad P = \operatorname{Re}(\underline{S}), \quad Q = \operatorname{Im}(\underline{S}), \quad \varphi = \arg(\underline{S}) = \varphi_u - \varphi_i$$

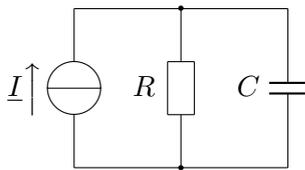
3.2.b Zusammenhang mit \underline{U} und \underline{I}



$$\begin{aligned} \underline{S} &= U \cdot I \cdot e^{j\varphi}, & \varphi &= \varphi_u - \varphi_i \\ &= U \cdot I \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \underbrace{U \cdot e^{j\varphi_u}}_{\underline{U}} \cdot \underbrace{I \cdot e^{-j\varphi_i}}_{\underline{I}^*} \end{aligned}$$

$$\boxed{\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^*}$$

Beispiel:



gegeben: $R = 1 \Omega$, $C = 1 \text{ mF}$, $f = 50 \text{ Hz}$, $I = 1 \text{ A}$

gesucht: \underline{S} , S , P , Q

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^*, \quad \underline{U} = \underline{I} \cdot \underline{Z} = \frac{\underline{I}}{\underline{Y}} = \frac{\underline{I}}{G + jB}, \quad G = \frac{1}{R}, \quad B = \omega C$$

$$\underline{S} = \frac{\underline{I} \cdot \underline{I}^*}{G + jB} = \frac{I^2}{G + jB} = \frac{I^2}{G + j\omega C} = \underbrace{\frac{G \cdot I^2}{(G^2 + (\omega C)^2)}}_P + j \underbrace{\frac{-\omega C \cdot I^2}{G^2 + (\omega C)^2}}_Q$$

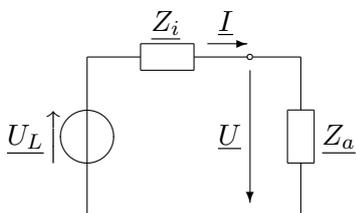
$$P = \frac{G}{G^2 + (\omega C)^2} \cdot I^2 = 0,717 \text{ W}$$

$$Q = -\frac{\omega C}{G^2 + (\omega C)^2} \cdot I^2 = -0,532 \text{ var}$$

$$S = \frac{I^2}{\sqrt{G^2 + (\omega C)^2}} = \sqrt{P^2 + Q^2} = 0,893 \text{ VA}$$

3.3 Leistungsübertragung im Grundstromkreis

3.3.a (Wirk-)Leistungsübertragung



Problem:

gegeben: Generator (\underline{U}_L , \underline{Z}_i)

gesucht: \underline{Z}_a so, daß P maximal wird.

$$P = \operatorname{Re}(\underline{S}) = \operatorname{Re}(\underline{U} \cdot \underline{I}^*)$$

$$\underline{U} = \frac{\underline{Z}_a}{\underline{Z}_i + \underline{Z}_a} \cdot \underline{U}_L, \quad \underline{I} = \frac{\underline{U}_L}{\underline{Z}_i + \underline{Z}_a}$$

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \frac{\underline{Z}_a \cdot \underline{U}_L \cdot \underline{U}_L^*}{(\underline{Z}_i + \underline{Z}_a) \cdot (\underline{Z}_i + \underline{Z}_a)^*} = \frac{\underline{Z}_a}{|\underline{Z}_i + \underline{Z}_a|} \cdot \underline{U}_L^2$$

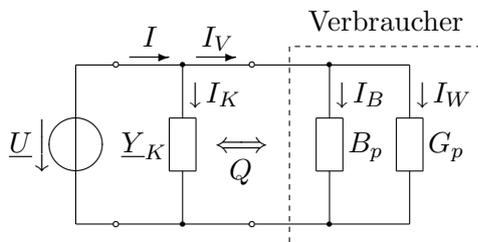
$$\underline{Z}_a = R_a + jX_a, \quad \underline{Z}_i = R_i + jX_i$$

$$P = \operatorname{Re}(\underline{S}) = \frac{R_a \cdot U_L^2}{(R_i + R_a)^2 + (X_i + X_a)^2} \Rightarrow \text{maximal}$$

Maximum bei:

$$\left. \begin{array}{l} X_a = -X_i \\ P = \frac{R_a}{(R_i + R_a)^2} \cdot U_L^2 \longrightarrow R_a = R_i \end{array} \right\} \boxed{\underline{Z}_a = R_i - jX_i = \underline{Z}_i^*}$$

3.3.b Blindleistungskompensation



Problem

gegeben: Verbraucher am Netz, $\underline{Y}_K = G_p + jB_p$

gesucht: Kompensationszweigpol, so daß I maximal wird

$$\underline{I} = \underline{U} \cdot \underline{Y} = \underline{U} \cdot (\underline{Y}_K + \underline{Y}_V) = \underline{U} \cdot (\underbrace{G_K + jB_K}_{I_K} + \underbrace{G_p + jB_p}_{I_V})$$

$$I = |\underline{I}| = U \cdot \sqrt{\underbrace{(G_K + G_p)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(B_K + B_p)^2}_{\leq 0}} \Rightarrow \min(G_K, B_K)$$

Minimum bei $G_K = 0 \rightarrow I = U \cdot \sqrt{G_p^2 + (B_K + B_p)^2}$ und $B_K = -B_p$.

\Rightarrow Minimaler Strom: $I = U \cdot G_p = I_W$

Ergebnis:

- Verbraucher und Kompensationszweigpol zusammen nehmen nur Wirkleistung auf
- Blindleistung wird zwischen Verbraucher und Kompensationszweigpol ausgetauscht
- Verbraucher sind meistens induktiv \rightarrow Kompensationskapazität

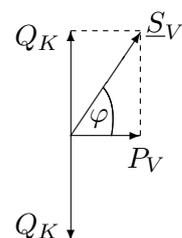
Beispiel: Leuchtstofflampe, gemessen: $U = 230 \text{ V}$, $P = 60 \text{ W}$, $I = 0,52 \text{ A}$

Leistungen:

$$S = U \cdot I = 230 \text{ V} \cdot 0,52 \text{ A} = 120 \text{ VA}$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi = S \cdot \cos \varphi \rightarrow \cos \varphi = \frac{P}{S} = 0,5, \quad \varphi = 60^\circ$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi = \sqrt{S^2 - P^2} = 104 \text{ var}$$



Kompensationskapazität:

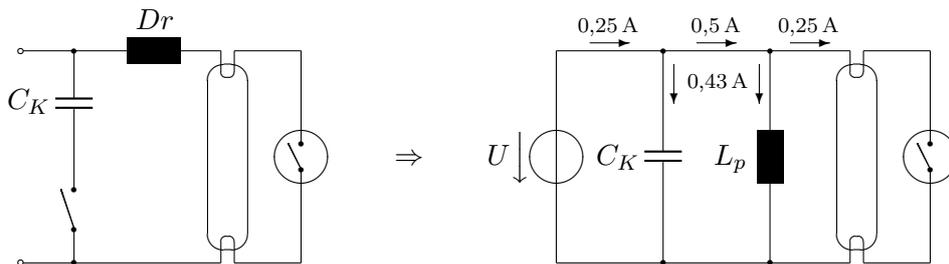
$$Q_K = -Q_V = -U^2 \cdot \omega C \Rightarrow C_K = \frac{Q_V}{U^2 \cdot \omega} = 6,2 \mu\text{F}$$

Elemente der Ersatzschaltung: (Modell des Verbrauchers)

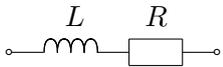
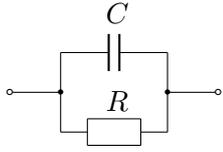
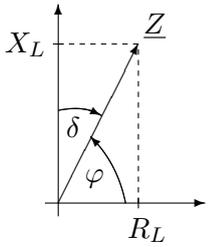
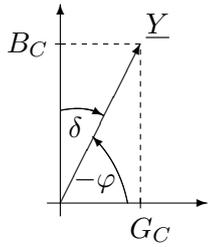
$$P = U^2 \cdot G_p \Rightarrow G_p = \frac{P}{U^2} = 1,1 \text{ mS} \hat{=} 909 \Omega$$

$$Q = U^2 \cdot B_p \Rightarrow B_p = \frac{Q}{U^2} = 2 \text{ mS} = \frac{1}{\omega L_p} \Rightarrow L_p = \frac{1}{\omega B_p} = 1,7 \text{ H}$$

Schaltung / Ersatzschaltung



3.3.c Modelle technischer Bauelemente

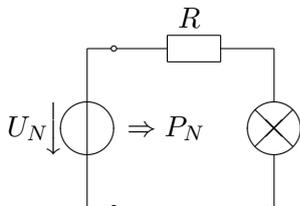
Spulen	Kondensatoren
	
$\underline{Z} = R_L + jX_L, \quad X_L = \omega L$	$\underline{Y} = G_C + jB_C, \quad B_C = \omega C$
	
Komplexe Leistung: $\underline{S} = P + jQ = U \cdot I^* = I^2 \cdot \underline{Z} = U^2 \cdot \underline{Y}$	
$P = I^2 \cdot R_L, \quad Q = I^2 \cdot X_L$	$P = U^2 \cdot G_C, \quad Q = U^2 \cdot B_C$
Verlustfaktor $d = \frac{\text{Wirkleistung}}{ \text{Blindleistung} } = \frac{P}{ Q } = \tan \delta, \quad \delta = \text{Verlustwinkel}$	
$d_L = \frac{P}{Q} = \frac{R_L}{X_L} = \frac{R_L}{\omega L} = \tan \delta_L$	$d_C = \frac{P}{Q} = \frac{G_C}{B_C} = \frac{G_C}{\omega C} = \tan \delta_C$
Güte $Q = \frac{ \text{Blindleistung} }{\text{Wirkleistung}} = \frac{ Q }{P} = \frac{1}{d}$	
$Q_L = \frac{1}{d_L} = \frac{X_L}{R_L} = \frac{\omega L}{R_L}$	$Q_C = \frac{1}{d_C} = \frac{B_C}{G_C} = \frac{\omega C}{G_C}$

3.3.d Kleinverbraucher am Netz

Eine Lampe (12 V, 10 W) ist am Netz (230 V) zu betreiben.

$$I = \frac{P}{U} = \frac{10 \text{ W}}{12 \text{ V}} = 0,83 \text{ A}$$

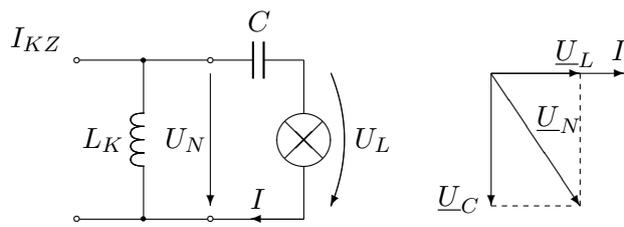
Vorwiderstand



$$R = \frac{U - U_L}{I} = \frac{218 \text{ V}}{0,83 \text{ A}} = 262 \Omega$$

$$P_N = U_N \cdot I = 230 \text{ V} \cdot 0,83 \text{ A} = 192 \text{ W}$$

Serienkondensator



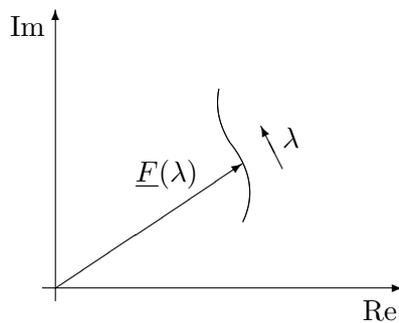
$$U_C = \sqrt{U_N^2 - U_L^2} = \frac{1}{\omega C}$$
$$C = \frac{1}{\omega \sqrt{U_N^2 - U_L^2}} = 11,5 \mu\text{F}$$

$$S = U_N \cdot I = 192 \text{ VA}, P = 10 \text{ W}, I_{KZ} = \frac{P}{U} = \frac{10 \text{ W}}{230 \text{ V}} = 0,043 \text{ A}$$

Kapitel 4

Ortskurven

4.1 Grundbegriffe

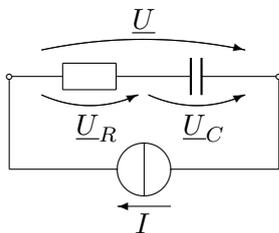


Eine Ortskurve ist der geometrische Ort aller Endpunkte des Zeigers $\underline{F}(\lambda)$ bei Änderung von λ .

\underline{F} kann sein: Spannung, Strom, komplexe Leistung, Impedanz, Admittanz, Spannungsverhältnis, Stromverhältnis.

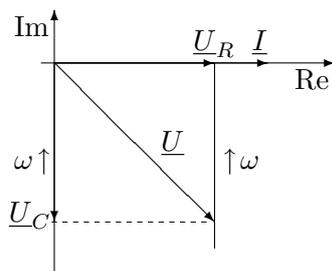
λ kann sein: Frequenz, Widerstand, Kapazität, Induktivität

Beispiel 1



gegeben: $R, C, \underline{I} = I$

gesucht: Ortskurven von $\underline{U}_R, \underline{U}_C, \underline{U}, \underline{Z}$ in Abhängigkeit von $\omega = 2\pi f$

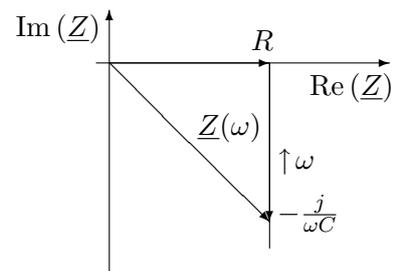


$$\underline{U}_R = I \cdot R = U_R \quad (\text{reell})$$

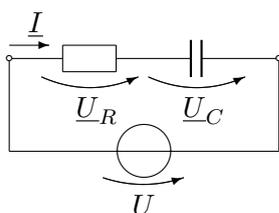
$$\underline{U}_C = \frac{I}{j\omega C} = -j \frac{I}{\omega C}$$

$$\underline{U} = I \cdot R - j \frac{I}{\omega C} = I \cdot \underline{Z}$$

$$\underline{Z}(\omega) = R - j \frac{I}{\omega C}$$

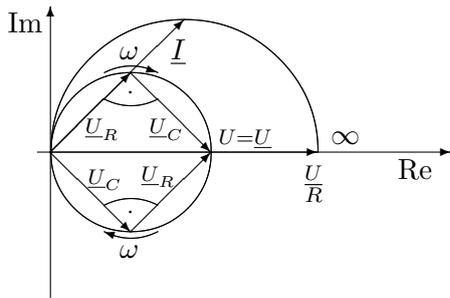


Beispiel 2



gegeben: $R, C, \underline{U} = U$

gesucht: Ortskurven von $\underline{U}_R, \underline{U}_C, \underline{I}$ in Abhängigkeit von $\omega = 2\pi f$



$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C, \quad \underline{U}_R = I \cdot R, \quad \underline{U}_C = -j \frac{I}{\omega C}$$

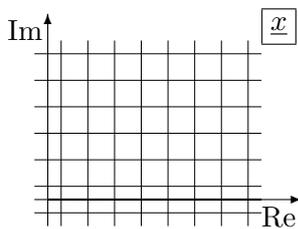
Thaleskreis: Die Ortskurven von \underline{U}_C , \underline{U}_R und I sind Kreise!

Formel Ausdruck:

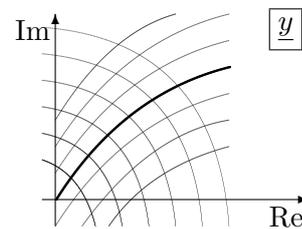
$$\underline{Z}(\omega) = R - j \frac{1}{\omega C} \quad \underline{I}(\omega) = \frac{U}{\underline{Z}(\omega)} = \frac{U}{R - j\omega C}$$

$$\underline{F}(\lambda) = \underline{a} + \underline{b} \cdot f(\lambda) \quad \underline{F}(\lambda) = \frac{\underline{b}}{\underline{a}_1 + \underline{a}_2 \cdot f(\lambda)}$$

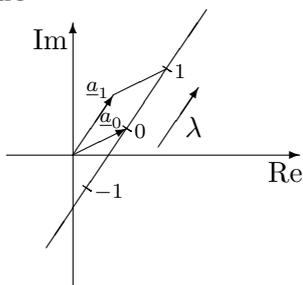
4.2 Einfache Ortskurven



$$\underline{y} = F(\underline{x})$$



Gerade



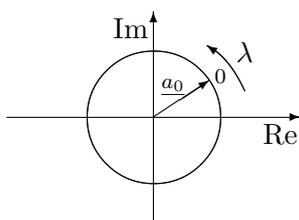
$$f(\lambda) = \underline{a}_0 + \underline{a}_1 \cdot \lambda$$

Spezialfall: $\underline{a}_0 = 0$

$$f(\lambda) = \underline{a}_1 \cdot \lambda$$

→ Gerade durch den Ursprung

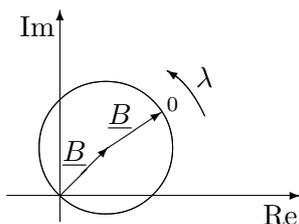
Kreis um den Ursprung



$$\underline{f}(\lambda) = \underline{a}_0 \cdot \frac{1 + \underline{a}_1^* \cdot \lambda}{1 + \underline{a}_1 \cdot \lambda}$$

$$\underline{f}(\lambda) = \underline{a}_0 \cdot e^{j\varphi(\lambda)}$$

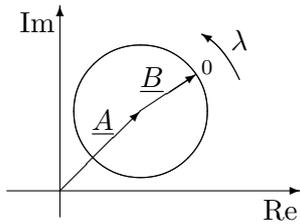
Kreis durch den Ursprung



$$\underline{f}(\lambda) = \frac{1}{\underline{a}_0 + \underline{a}_1 \cdot \lambda}$$

$$\underline{f}(\lambda) = \underline{B} \left(1 + e^{j\varphi(\lambda)} \right)$$

Kreis in allgemeiner Lage



$$\underline{f}(\lambda) = \frac{b_0 + b_1 \cdot \lambda}{a_0 + a_1 \cdot \lambda}$$

$$\underline{f}(\lambda) = \underline{A} + \underline{B} \cdot e^{j\varphi(\lambda)}$$

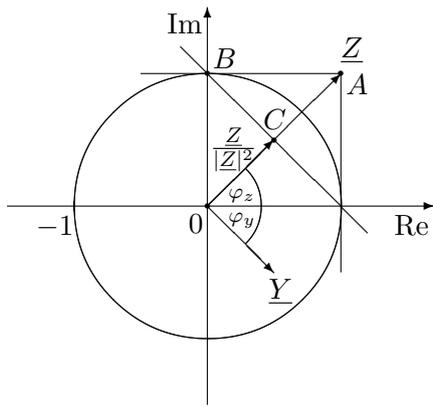
4.3 Inversion

Inversion einer komplexen Größe bedeutet die Bildung ihres Reziprokwertes.

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}, \quad \underline{Y} \cdot e^{j\varphi_y} = \frac{1}{\underline{Z} \cdot e^{j\varphi_z}} \rightarrow \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}, \quad \varphi_y = -\varphi_z$$

Der Zeiger \underline{Z} aus der \underline{Z} -Ebene wird auf den Zeiger \underline{Y} der \underline{Y} -Ebene abgebildet (konforme Abbildung) durch $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$.

4.3.a Inversion eines Zeigers



1. Betrag

Die Dreiecke $0AB$ und $0BC$ sind ähnlich

$$\rightarrow \frac{Z}{1} = \frac{1}{Y}$$

2. Phase

$$\varphi_y = -\varphi_z$$

→ Spiegelung an der reellen Achse

Maßstäbliche Konstruktion: Inversionsradius

Z-Maßstab

Y-Maßstab

$$z = m_z \cdot \underline{Z}$$

$$y = m_y \cdot \underline{Y}$$

$$[m_z] = \frac{\text{cm}}{\Omega}$$

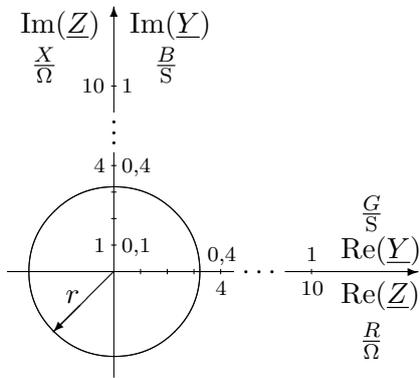
$$[m_y] = \frac{\text{cm}}{\text{S}}$$

$$\underline{Z} \cdot \underline{Y} = 1 = \frac{z}{m_z} \cdot \frac{y}{m_y} = 1 \rightarrow z \cdot y = m_z \cdot m_y = r^2$$

r – Radius des Inversionskreises, Inversionsradius

Beispiel

Darzustellender Bereich	gewählter Zeigermaßstab	
$Z = 1 \dots 10 \Omega$	$m_z = \frac{1 \text{ cm}}{\Omega}$	$\Rightarrow r = \sqrt{m_z \cdot m_y} = \sqrt{10 \text{ cm}^2}$ $= 3,2 \text{ cm}$
$Y = 0,1 \dots 1 \text{ S}$	$m_y = \frac{10 \text{ cm}}{\Omega}$	



4.3.b Inversion von Ortskurven

Problem: gegeben: Ortskurve von $\underline{F}(\lambda)$ gesucht: Ortskurve von $\frac{1}{\underline{F}(\lambda)}$

Verfahren:

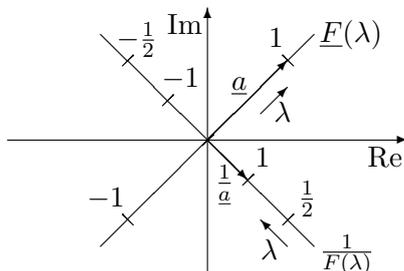
1. Punktweise Inversion: für verschiedene λ -Werte wird $\frac{1}{\underline{F}(\lambda)}$ aus $\underline{F}(\lambda)$ durch Zeigerinversion bestimmt.
2. Anwendung von *Inversionsregeln* für einfache Ortskurven

Grundregel: Bei der Inversion gehen Kreise in Kreise über \rightarrow Die Inversion ist *Kreistreu*.

Beweis: $\underline{F}(\lambda) = \frac{\underline{b}_0 + \underline{b}_1 \cdot \lambda}{\underline{a}_0 + \underline{a}_1 \cdot \lambda} \rightarrow \frac{1}{\underline{F}(\lambda)} = \frac{\underline{a}_0 + \underline{a}_1 \cdot \lambda}{\underline{b}_0 + \underline{b}_1 \cdot \lambda}$

Wichtige Fälle

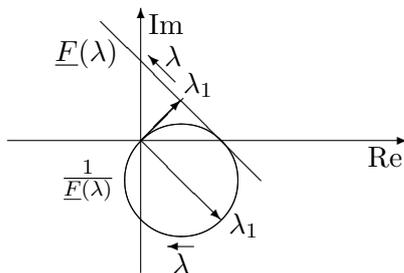
1. Gerade durch den Ursprung \leftrightarrow Gerade durch den Ursprung



$$\underline{F}(\lambda) = \underline{a} \cdot \lambda$$

$$\frac{1}{\underline{F}(\lambda)} = \frac{1}{\underline{a} \cdot \lambda} = \frac{1}{\underline{a}} \cdot f(\lambda)$$

2. Gerade nicht durch den Ursprung \leftrightarrow Kreis durch den Ursprung

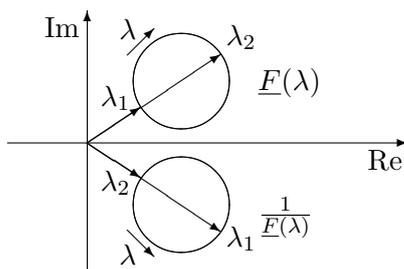


$$\underline{F}(\lambda) = \underline{a} + \underline{b} \cdot \lambda$$

$$\frac{1}{\underline{F}(\lambda)} = \frac{1}{\underline{a} + \underline{b} \cdot \lambda}$$

λ_1 : minimaler Betrag von $\underline{F}(\lambda)$
 \rightarrow maximaler Betrag von $\frac{1}{\underline{F}(\lambda)} \rightarrow$ Radius

3. Kreis nicht durch den Ursprung \leftrightarrow Kreis nicht durch den Ursprung

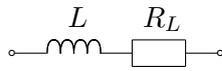


$$\underline{F}(\lambda) = \frac{\underline{a}_0 + \underline{a}_1 \cdot \lambda}{\underline{b}_0 + \underline{b}_1 \cdot \lambda}$$

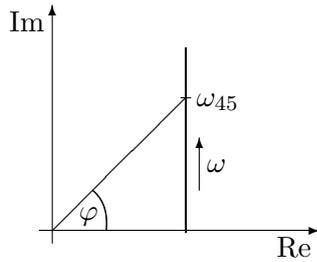
$$\frac{1}{\underline{F}(\lambda)} = \frac{\underline{b}_0 + \underline{b}_1 \cdot \lambda}{\underline{a}_0 + \underline{a}_1 \cdot \lambda}$$

4.3.c Anwendungen

1. \underline{Z} - und \underline{Y} -Ortskurven technischer Bauelemente in Abhängigkeit von ω

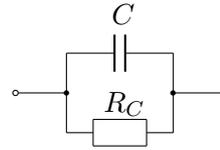
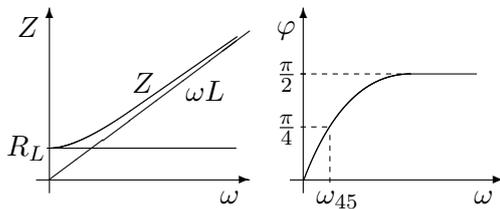


$$\underline{Z}(\omega) = R_L + j\omega L$$

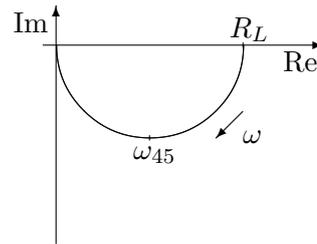


$$R_L = \omega_{45} \cdot L, \quad \omega_{45} = \frac{R_L}{L}$$

$$Z = \sqrt{R_L^2 + (\omega L)^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{\omega L}{R_L}$$

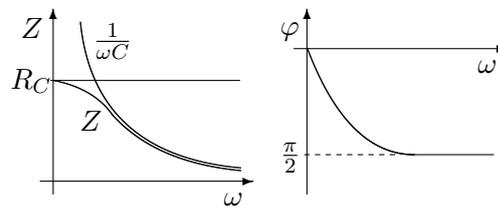


$$\underline{Z}(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{R_C} + j\omega C} = \frac{1}{G + j\omega C}$$

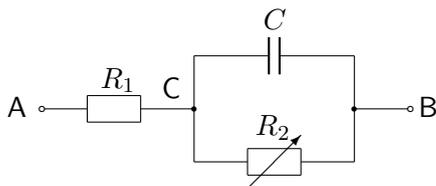


$$G_C = \omega_{45} \cdot C, \quad \omega_{45} = \frac{1}{C \cdot R_C}$$

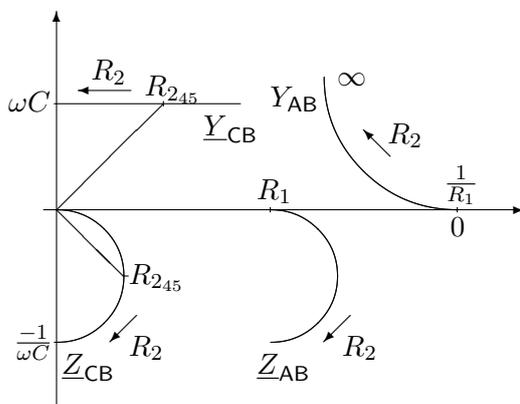
$$Z = \frac{1}{\sqrt{R_C^2 + (\omega C)^2}}, \quad \varphi = -\arctan \frac{\omega C}{G_C}$$



2. Ortskurve in Abhängigkeit von einem Parameter



gesucht: Ortskurven $\underline{Z}_{AB}(R_2)$, $\underline{Y}_{AB}(R_2)$
(\underline{Z}_{AB} , \underline{Y}_{AB} formelmäßig berechnen)



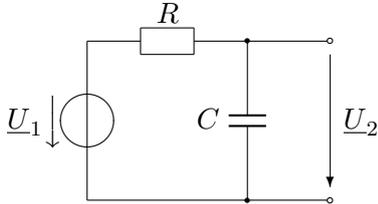
$$\underline{Y}_{CB} = \frac{1}{R_2} + j\omega C, \quad \frac{1}{R_2} = \omega_{45} C, \quad R_2 = \frac{1}{\omega_{45} C}$$

R_1 in Serie zu $\underline{Y}_{CB} \rightarrow$ invertieren der OK
 $\rightarrow \underline{Z}_{CB}$, R_1 addieren $\rightarrow \underline{Z}_{AB}$, invertieren $\rightarrow \underline{Y}_{AB}$.

4.4 Frequenzgänge

Frequenzgänge sind die Darstellungen von Betrag und Phase einer komplexen Größe über die Frequenz.

Beispiel: Spannungsverhältnis einer RC -Schaltung



$$\underline{G}(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} \quad (\text{Spannungs-})\text{Übertragungsfaktor}$$

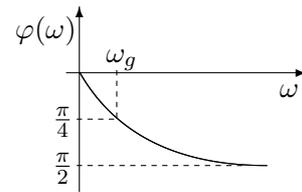
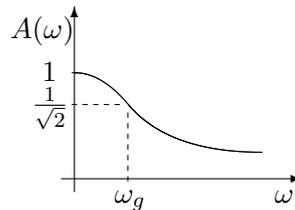
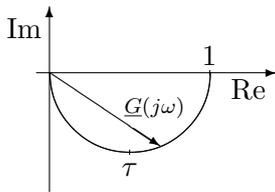
$$A(\omega) = |\underline{G}(j\omega)| \quad \text{Amplituden(frequenz)gang}$$

$$\varphi(\omega) = \arg(\underline{G}(j\omega)) \quad \text{Phasen(frequenz)gang}$$

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega CR} = \frac{1}{j\omega\tau} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_g}}$$

$$A(\omega) = |\underline{G}(j\omega C)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}} = \begin{cases} \approx 1 & \text{für } \omega \ll \omega_g \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{für } \omega = \omega_g \\ \approx \frac{\omega_g}{\omega} & \text{für } \omega \gg \omega_g \end{cases}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\omega_g}, \quad \omega_g = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$$

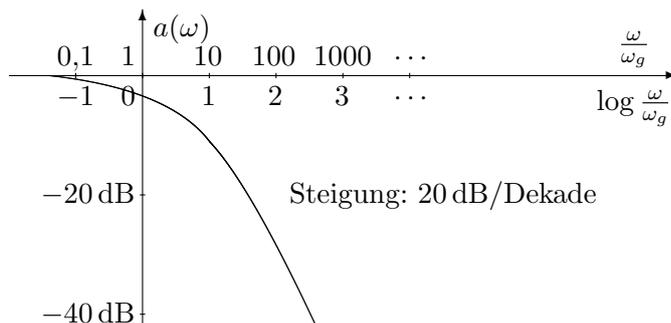


4.5 Bode Diagramm

$a(\omega) = 20 \log |\underline{G}(j\omega)| \text{ dB}$
 $\varphi(\omega)$ } dargestellt über $\log \frac{\omega}{\omega_g}$.

$$a(\omega) = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}} \text{ dB} = -20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 \right) \text{ dB}$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ dB} & \text{für } \frac{\omega}{\omega_g} \ll 1 \\ -3 \text{ dB} & \text{für } \frac{\omega}{\omega_g} = 1 \\ -20 \cdot \log \frac{\omega}{\omega_g} \text{ dB} & \text{für } \frac{\omega}{\omega_g} \gg 1 \end{cases}$$



Ausgewählte Größenordnungen

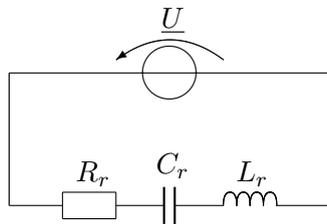
$\frac{U_2}{U_1}$	10^{-2}	10^{-1}	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	10	100
$\frac{a}{\text{dB}}$	-40	-20	-3	0	3	20	40

Kapitel 5

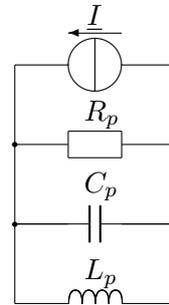
Resonanzkreise

5.1 Impedanz und Admittanz

Reihenresonanzkreis



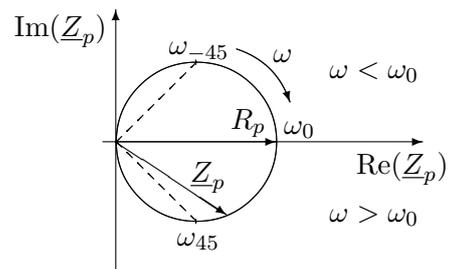
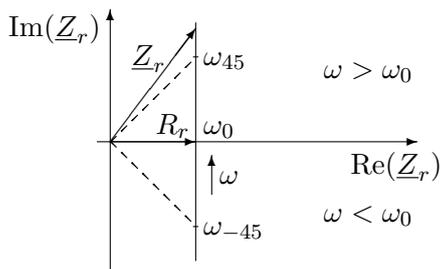
Parallelresonanzkreis



Impedanz

$$\begin{aligned} \underline{Z}_r &= R_r + j\omega L_r + \frac{1}{j\omega C_r} \\ &= R_r + j \underbrace{\left(\omega L_r - \frac{1}{\omega C_r} \right)}_{X_r(\omega)} \end{aligned}$$

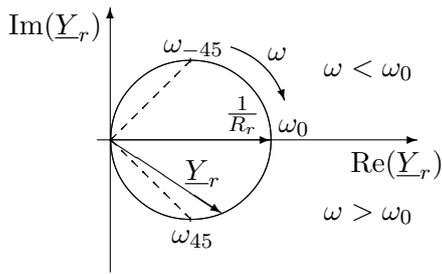
$$\begin{aligned} \underline{Z}_p &= \frac{1}{G_p + j\omega C_p + \frac{1}{j\omega L_p}} \\ &= \frac{1}{G_p + j\left(\omega C_p - \frac{1}{\omega L_p}\right)} \end{aligned}$$



Admittanz

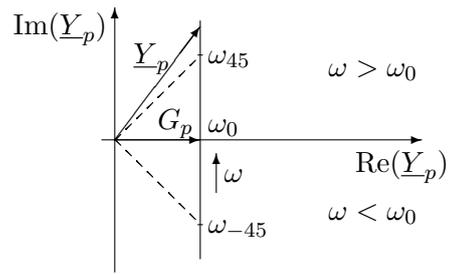
$$\begin{aligned} \underline{Y}_r &= \frac{1}{R_r + j\omega L_r + \frac{1}{j\omega C_r}} \\ &= \frac{1}{R_r + j\left(\omega L_r - \frac{1}{\omega C_r}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{Y}_p &= G_p + j\omega C_p + \frac{1}{j\omega L_p} \\ &= G_p + j\left(\omega C_p - \frac{1}{\omega L_p}\right) \end{aligned}$$



Scheinwiderstand

$$Z = |Z| = \sqrt{R_r^2 + \left(\omega L_r - \frac{1}{\omega C_r}\right)^2}$$



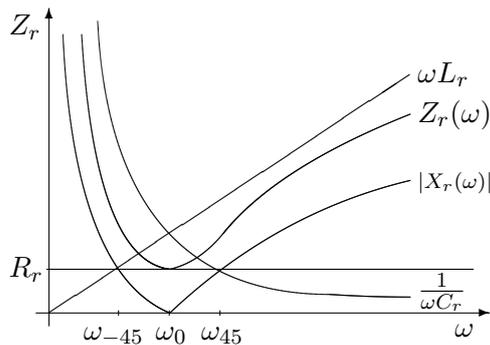
Scheinleitwert

$$Y = |Y| = \sqrt{G_p^2 + \left(\omega C_p - \frac{1}{\omega L_p}\right)^2}$$

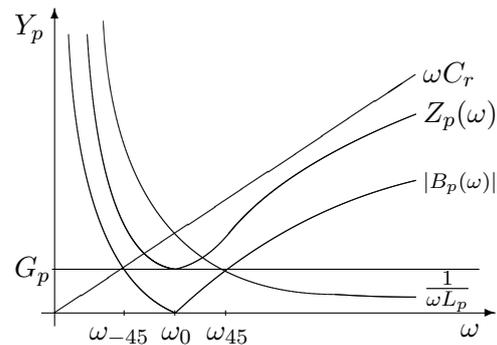
Phasenwinkel

$$\varphi_z = \arctan \frac{\omega L_r - \frac{1}{\omega C_r}}{R_r}$$

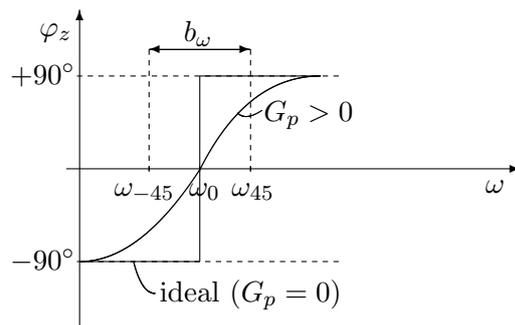
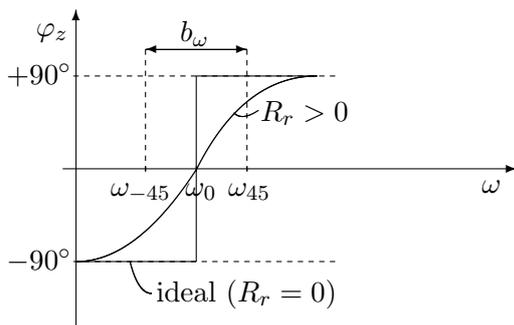
$$\varphi_y = \arctan \frac{\omega C_p - \frac{1}{\omega L_p}}{G_p}$$



$\omega < \omega_0$ kapazitiv $\omega > \omega_0$ induktiv



$\omega > \omega_0$ induktiv $\omega < \omega_0$ kapazitiv



Resonanzfrequenz ω_0

Blindwiderstand

$$X_r(\omega_0) = 0$$

$$\omega_0 \cdot L_r = \frac{1}{\omega_0 \cdot C_r}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_r \cdot C_r}}$$

Blindleitwert

$$B_p(\omega_0) = 0$$

$$\omega_0 \cdot C_p = \frac{1}{\omega_0 \cdot L_p}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_p \cdot L_p}}$$

Imaginärteil von

Impedanz

Admittanz

verschwindet,

Scheinwiderstand

Scheinleitwert

erreicht Minimum.

$$\underline{U} = \text{const.} \Rightarrow I \sim \frac{1}{Z}$$

$$\underline{I} = \text{const.} \Rightarrow U \sim \frac{1}{Y}$$

Der Strom hat im spannungsgespeisten Resonanzkreis bei Resonanz Höchstwert.

Die Spannung hat im stromgespeisten Resonanzkreis bei Resonanz Höchstwert.

5.2 Normierte Größen

$$\varrho = \frac{|\text{Zwischen } L \text{ und } C \text{ pendelnde Blindleistung}|}{\text{Wirkleistung}} \quad \text{Güte}$$

Reihenresonanzkreis

Parallelresonanzkreis

$$\begin{aligned} \varrho_r &= \frac{I^2 \cdot \omega_0 \cdot L_r}{I^2 \cdot R_r} = \frac{\omega_0 \cdot L_r}{R_r} \\ &= \frac{1}{\omega_0 \cdot C_r \cdot R_r} = \frac{1}{R_r} \cdot \sqrt{\frac{L_r}{C_r}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varrho_p &= \frac{U^2 \cdot \omega_0 \cdot C_p}{U^2 \cdot R_p} = \frac{\omega_0 \cdot C_p}{R_p} \\ &= \frac{1}{\omega_0 \cdot L_p \cot G_p} = \frac{1}{G_p} \cdot \sqrt{\frac{C_p}{L_p}} \end{aligned}$$

5.2.a Barkhausen-Verstimmung

$$v = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \Omega - \frac{1}{\Omega} \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Näherung

$$v \approx \begin{cases} -\frac{1}{\Omega} & \Omega \ll 1 \\ 2(\Omega - 1) & |\Omega - 1| \ll 1 \quad * \\ \Omega & \Omega \gg 1 \end{cases}$$

*) Näherung für $\omega \approx \omega_0$:

mit $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$

$$\begin{aligned} v &= \frac{\omega_0 + \Delta\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_0 + \Delta\omega} = 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} - \frac{1}{1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}}, & \frac{1}{1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}} &\approx 1 - \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \text{ für } \left| \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right| \ll 1 \\ &= 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} - 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 2 \cdot \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = 2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right) \\ &= 2(\Omega - 1) \end{aligned}$$

5.2.b 45°-Frequenzen

Reihenresonanzkreis

$$\varphi_z = \pm \frac{\pi}{4}$$

$$\varrho_r \cdot v_{45} = \pm 1$$

$$v_{45} = \pm \frac{1}{\varrho_r}$$

$$\omega_{\pm 45} = \omega_0 \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\varrho} \right)^2} \pm \frac{1}{2\varrho} \right) \approx \omega_0 \cdot \left(1 \pm \frac{1}{2\varrho} \right) \quad \text{für } \varrho \gg 1$$

$$Z(\omega_{45}) = \sqrt{2} \cdot R_r$$

Parallelresonanzkreis

$$\varphi_y = \pm \frac{\pi}{4}$$

$$\varrho_p \cdot v_{45} = \pm 1$$

$$v_{45} = \pm \frac{1}{\varrho_p}$$

$$Y(\omega_{45}) = \sqrt{2} \cdot Y_p$$

5.2.c Bandbreite

absolut:

$$b_\omega = \omega_{+45} - \omega_{-45}$$

$$b_\omega = \frac{\omega_0}{\varrho}$$

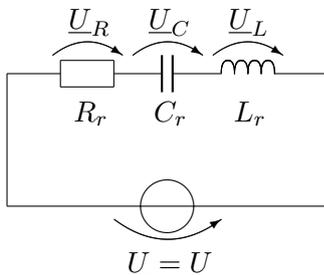
$$b_f = f_{+45^\circ} - f_{-45^\circ} = \frac{b_\omega}{2\pi}$$

$$b_f = \frac{f_0}{\varrho}$$

relativ:

$$b = \frac{b_\omega}{\omega_0} = \frac{b_f}{f_0} = \frac{1}{\varrho}$$

5.3 Strom- und Spannungsverläufe (Reihenschaltung)



$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{U}{R(1 + j\varrho v)}$$

$$v = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \Omega - \frac{1}{\Omega}$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$I = \frac{U}{R \cdot \sqrt{1 + (\varrho v)^2}}$$

$$\varphi_I = -\arctan(\varrho v)$$

$$\frac{U_L}{U} = \frac{j\omega L}{R(1 + j\varrho v)} = j \frac{\omega_0 L \frac{\omega}{\omega_0}}{R(1 + j\varrho v)} = j\varrho \frac{\Omega}{1 + j\varrho v} = \frac{1}{1 - \Omega^2 - j\frac{1}{\varrho\Omega}}$$

$$\frac{U_C}{U} = \frac{1}{j\omega C \cdot R(1 + j\varrho v)} = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{j\omega_0 C \cdot R(1 + j\varrho v)} = \frac{\varrho}{j} \frac{\frac{1}{\Omega}}{1 + j\varrho v} = \frac{1}{1 - \Omega^2 - j\frac{\Omega}{\varrho}}$$

$$\frac{U_L}{U} = \varrho \cdot \frac{\Omega}{\sqrt{1 + (\varrho v)^2}}$$

$$\varphi_{U_L} = \frac{\pi}{2} - \arctan(\varrho v)$$

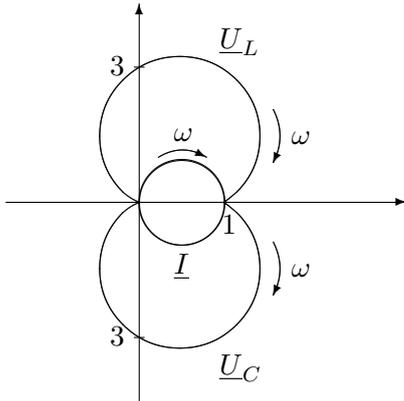
$$\left. \frac{U_L}{U} \right|_{\max} = \frac{\varrho}{\sqrt{1 - \frac{1}{4\varrho^2}}} \approx \varrho \left(1 + \frac{1}{8\varrho^2} \right) \quad \text{bei} \quad \Omega_{L_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2\varrho^2}}} \approx 1 + \frac{1}{4\varrho^2}$$

$$\frac{U_C}{U} = \varrho \cdot \frac{\frac{1}{\Omega}}{\sqrt{1 + (\varrho v)^2}}$$

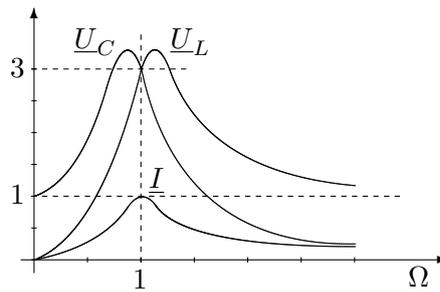
$$\varphi_{U_L} = -\frac{\pi}{2} - \arctan(\varrho v)$$

$$\left. \frac{U_C}{U} \right|_{\max} = \frac{\varrho}{\sqrt{1 - \frac{1}{4\varrho^2}}} \approx \varrho \left(1 + \frac{1}{8\varrho^2} \right) \quad \text{bei} \quad \Omega_{C_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2\varrho^2}}} \approx 1 + \frac{1}{4\varrho^2}$$

Ortskurven der Teilspannungen, $\varrho = 3$



Effektivwerte der Teilspannungen

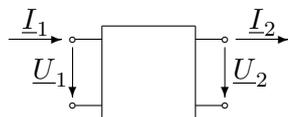


Kapitel 6

Lineare Zweitore

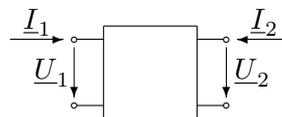
6.1 Strom-Spannungsbeziehungen (Zweitorgleichungen)

6.1.a Allgemeines



Kettenpfeilsystem

⇒ bei Kettenschaltung verwendet



symmetrisches Pfeilsystem

⇒ nachfolgend verwendet

Beispiele: elektronische Bauelemente (Transistoren), Verstärker, Filter, Leitung

Beschreibung: Von den 4 Klemmengrößen können zwei vorgegeben werden (unabhängige Variable), die anderen beiden ergeben sich daraus.

⇒ 6 Möglichkeiten

6.1.b Widerstandsform der Zweitorgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \cdot \underline{I}_2 \end{aligned} \right\} (\underline{U}) = (\underline{Z}) \cdot (\underline{I})$$

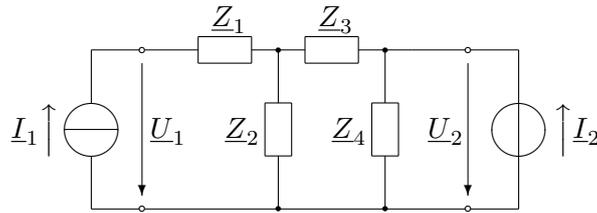
(\underline{Z}): Impedanzmatrix

Z_{ij} ($i, j = 1, 2$): Z - oder Widerstandsparameter des Zweipols

Eingangsimpedanz $\underline{Z}_{11} = \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \right _{\underline{I}_2=0}$	Transimpedanz rückwärts $\underline{Z}_{12} = \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} \right _{\underline{I}_1=0}$
Transimpedanz vorwärts $\underline{Z}_{21} = \left. \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1} \right _{\underline{I}_2=0}$	Innenimpedanz vorwärts $\underline{Z}_{22} = \left. \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} \right _{\underline{I}_1=0}$
Bei Leerlauf am Ausgang ($\underline{I}_2 = 0$)	Bei Leerlauf am Eingang ($\underline{I}_1 = 0$)

Bestimmung der Widerstandsparameter

1. Durch (Gesamt-)Netzwerkanalyse



$$U_1 = \left(Z_1 + \frac{1}{\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3 + Z_4}} \right) \cdot I_1 + \frac{Z_4}{Z_2 + Z_3 + Z_4} \cdot I_2$$

$$U_2 = \frac{Z_2 + Z_4}{Z_2 + Z_3 + Z_4} \cdot I_1 + \frac{1}{\frac{1}{Z_4} + \frac{1}{Z_2 + Z_3}} \cdot I_2$$

Durch Koeffizientenvergleich:

$$Z_{11} = Z_1 + \frac{Z_2 \cdot (Z_3 + Z_4)}{Z_2 + Z_3 + Z_4}$$

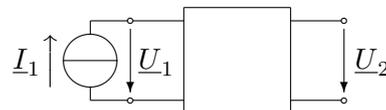
$$Z_{12} = \frac{Z_4 \cdot Z_2}{Z_2 + Z_3 + Z_4}$$

$$Z_{21} = \frac{Z_2 \cdot Z_4}{Z_2 + Z_3 + Z_4}$$

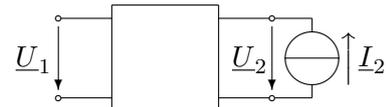
$$Z_{22} = \frac{Z_4 \cdot (Z_2 + Z_3)}{Z_2 + Z_3 + Z_4}$$

2. Aus den Definitionen der Zweitorparameter

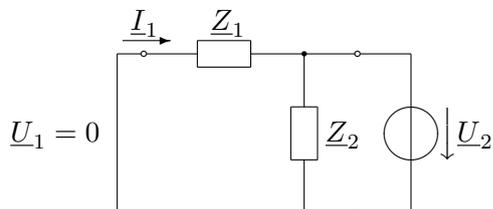
1. $I_2 = 0$: $Z_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$, $Z_{21} = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$



2. $I_1 = 0$: $Z_{12} = \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$, $Z_{22} = \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$



Beispiel: gesucht: \underline{Y}_{12}



$$\underline{Y}_{12} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{U_1=0} = -\frac{U_2}{Z_1 \cdot U_2} = -\frac{1}{Z_1}$$

6.1.c Umrechnung von Zweitorparametern

Zweitorparameter können ineinander umgerechnet werden.

Beispiel 1: \underline{Z} - \rightarrow \underline{Y} -Parameter

gegeben: $(\underline{Z}) = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}$ gesucht: $(\underline{Y}) = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$

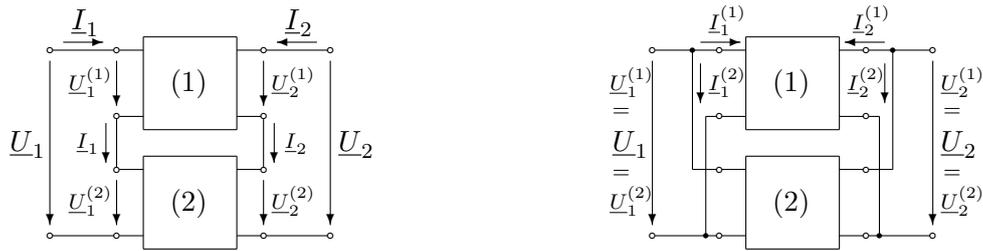
$$(\underline{U}) = (\underline{Z}) \cdot (\underline{I}), \quad (\underline{I}) = (\underline{Z}) \cdot (\underline{U})$$

$$(\underline{Y}) = (\underline{Z})^{-1} = \frac{1}{\det(\underline{Z})} \cdot \begin{pmatrix} \underline{Z}_{22} & -\underline{Z}_{12} \\ -\underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{11} \end{pmatrix}, \quad \det(\underline{Z}) = \underline{Z}_{11} \cdot \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12} \cdot \underline{Z}_{21}$$

Beispiel 2: \underline{A}_{11} ist aus den \underline{Z} -Parametern zu berechnen.

$$\underline{A}_{11} = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_2=0} = \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}} \quad \begin{aligned} U_1 &= \underline{Z}_{11} \cdot I_1 + \underline{Z}_{12} \cdot I_2 = \underline{Z}_{11} \cdot I_1 \\ U_2 &= \underline{Z}_{21} \cdot I_1 + \underline{Z}_{22} \cdot I_2 = \underline{Z}_{21} \cdot I_1 \end{aligned}$$

6.2 Zusammenschaltung von Zweitoren

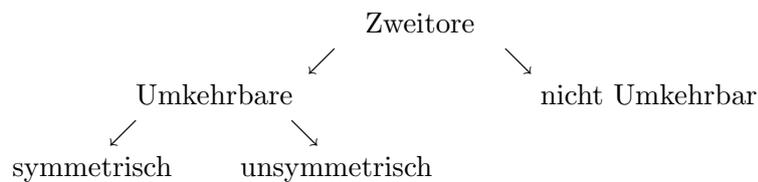


$$(\underline{U}) = (\underline{U}^{(1)}) + (\underline{U}^{(2)}) \quad (\underline{I}) = (\underline{I}^{(1)}) + (\underline{I}^{(2)})$$

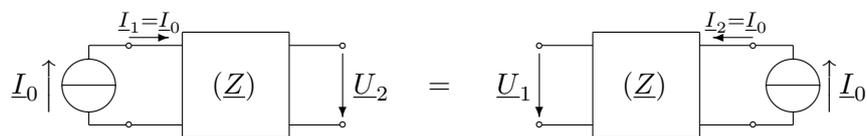
$$= (\underline{Z}^{(1)}) \cdot \underbrace{(\underline{I}^{(1)})}_{(\underline{I})} + (\underline{Z}^{(2)}) \cdot \underbrace{(\underline{I}^{(2)})}_{(\underline{I})} \quad = ((\underline{Y}^{(1)}) + (\underline{Y}^{(2)})) \cdot (\underline{U})$$

$$= ((\underline{Z}^{(1)}) + (\underline{Z}^{(2)})) \cdot (\underline{I})$$

6.3 Klassifikation von Zweitoren



6.3.a Umkehrbare Zweitoren

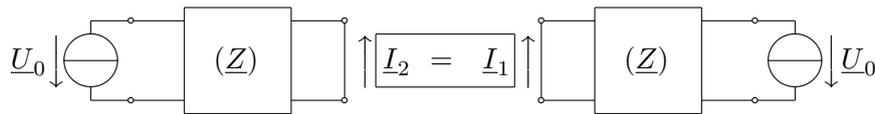


$$\left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = \boxed{\underline{Z}_{21}} = \boxed{\underline{Z}_{12}} = \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

für \underline{Y} -Parameter:

$$-\frac{\underline{Y}_{21}}{\det(\underline{Y})} = -\frac{\underline{Y}_{12}}{\det(\underline{Y})}$$

$$\boxed{\underline{Y}_{21} = \underline{Y}_{12}}$$

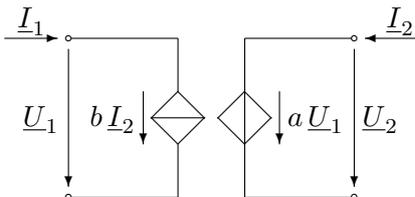


für \underline{A} -Parameter:

$$\det(\underline{A}) = -1$$

Ein $RLCM$ -Zweitor ist immer umkehrbar. Ein nicht umkehrbares Zweitor enthält stets gesteuerte Quellen. Ein Zweitor mit gesteuerten Quellen *kann* umkehrbar sein.

Beispiel



Wann ist dieses Zweitor umkehrbar?

$$\begin{aligned} U_2 &= a \cdot U_1 \\ I_1 &= b \cdot I_2 \end{aligned} \Rightarrow \text{inverse Hybriddarstellung}$$

$$\Rightarrow U_1 = \frac{1}{a} \cdot U_2, \quad I_1 = -b \cdot (-I_2)$$

\underline{A} -Beschreibung:

$$\det(\underline{A}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} = -\frac{b}{a} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad b = a$$

\Rightarrow idealer Transformator

6.3.b Symmetrische Zweitore

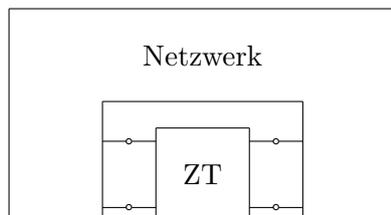
Ein umkehrbares Zweitor heißt symmetrisch, wenn die Leerlauf-Eingangswiderstände an den Klemmenpaaren gleich sind.



$$Z_{11} = Z_{22} \quad \longrightarrow \quad Y_{11} = Y_{22}, \quad A_{11} = A_{22} \quad (\text{Symmetriebedingungen})$$

6.4 Ersatzschaltungen

6.4.a Problem



gegeben: Zweitor, das in ein Netzwerk eingeschaltet ist (z.B. Transistor in einer Schaltung)

gesucht: Ströme und Spannungen in der Gesamtschaltung

Zur Netzwerkanalyse muß das Zweitor durch Netzwerkelemente ersetzt werden. Das leistet die Ersatzschaltung. Sie modelliert das Klemmenverhalten des Zweitores durch ein Netzwerk.

6.4.b Allgemeine Zweipole

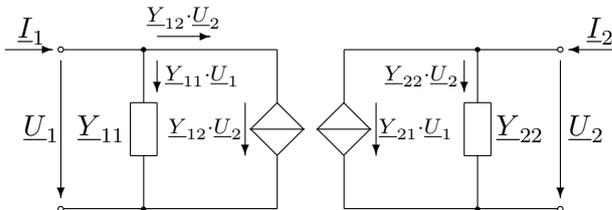
Aus jeder Darstellungsform der Zweitorgleichungen läßt sich eine Ersatzschaltung ableiten.

Prinzip

1. Eine Spannungsbilanz entspricht einer Serienschaltung (Maschensatz)
2. Eine Strombilanz entspricht einer Parallelschaltung (Knotensatz)

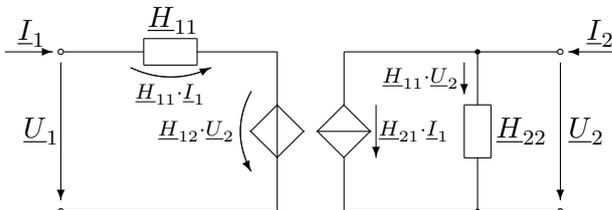
Beispiele

1. Y-Darstellung



$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11} \cdot U_1 + Y_{12} \cdot U_2 \\ I_2 &= Y_{21} \cdot U_1 + Y_{22} \cdot U_2 \end{aligned}$$

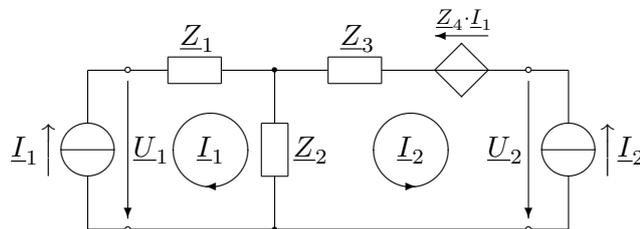
2. Hybrid-Darstellung



$$\begin{aligned} U_1 &= H_{11} \cdot I_1 + H_{12} \cdot I_2 \\ I_2 &= H_{21} \cdot I_1 + H_{22} \cdot U_2 \end{aligned}$$

6.4.c Zweitore mit durchgehender Masse (Dreipole)

Widerstandsparameter (Z-Darstellung)



Analyseergebnis

$$\begin{aligned} U_1 &= (Z_1 + Z_2)I_1 + Z_2 \cdot I_2 \\ U_2 &= (Z_2 + Z_4)I_1 + (Z_2 + Z_3)I_2 \end{aligned}$$

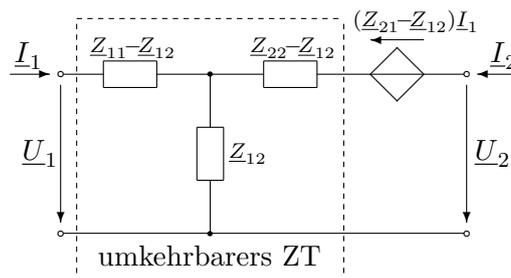
Z-Darstellung

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2 \\ U_2 &= Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= Z_{11} & Z_2 &= Z_{12} \\ Z_2 + Z_4 &= Z_{21} & Z_2 + Z_3 &= Z_{22} \end{aligned} \Rightarrow \begin{array}{|l} Z_1 = Z_{11} - Z_{12} & Z_2 = Z_{12} \\ Z_3 = Z_{22} - Z_{12} & Z_4 = Z_{21} - Z_{12} \end{array}$$

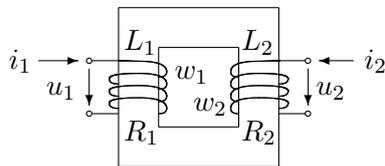
Ersatzschaltung



Kapitel 7

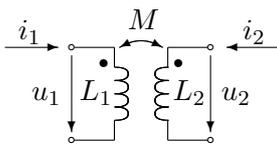
Transformator (Übertrager)

7.1 Transformatorgleichungen und Ersatzschaltung



$$u_1 = i_1 \cdot R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = i_2 \cdot R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$



Kenngröße: $\ddot{u} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{w_1}{w_2}$ wenn $R_{m1} = R_{m2}$

$$M = k \sqrt{L_1 \cdot L_2}$$

k : Koppelfaktor

$$k = \sqrt{1 - \sigma}, \quad \sigma = 1 - k^2$$

σ : Streufaktor

Transformation in das Komplexe

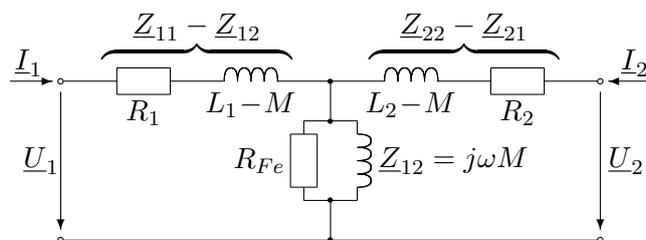
(harmonische Zeitverläufe, eingeschwungener Zustand)

$$\underline{U}_1 = \underbrace{(R_1 + j\omega L_1)}_{Z_{11}} \underline{I}_1 + \underbrace{j\omega M}_{Z_{12}} \underline{I}_2$$

$$\underline{U}_2 = \underbrace{j\omega M}_{Z_{21}} \underline{I}_1 + \underbrace{(R_2 + j\omega L_2)}_{Z_{22}} \underline{I}_2$$

Z-Darstellung

Allgemeine Ersatzschaltung eines Transformators



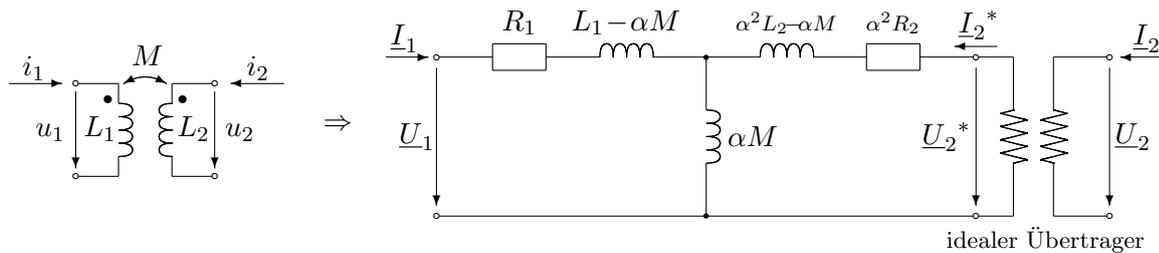
R_{Fe} modelliert die Eisenverluste \rightarrow Hysteresekurve durch Ellipse approximiert.

Nachteile:

1. Durchgehende Masse
2. Nur für $k < \ddot{u} < \frac{1}{k}$ positive Ersatzelemente

→ Behebung durch 7.2

7.2 Vereinfachte Ersatzschaltung



$$\underline{U}_2 = \frac{1}{\alpha} \cdot \underline{U}_2^* \quad \underline{I}_2 = \alpha \cdot \underline{I}_2^* \quad \alpha = \frac{\underline{U}_2^*}{\underline{U}_2}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= (R_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 + j\omega M \cdot \alpha \cdot \underline{I}_2^* \\ \frac{1}{\alpha}\underline{U}_2^* &= j\omega M \cdot \underline{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2) \cdot \alpha \cdot \underline{I}_2^* \\ \underline{U}_2^* &= j\omega M \cdot \alpha \cdot \underline{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2) \cdot \alpha^2 \cdot \underline{I}_2^* \end{aligned}$$

Durch geeignete Wahl von α unterschiedliche Ersatzschaltbilder

1. Symmetrisches Ersatzschaltbild

$$\boxed{L_1 - \alpha M = \alpha^2 \cdot L_2 - \alpha \cdot M} \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \ddot{u}$$

$$\begin{aligned} L_1 - \alpha \cdot M &= L_1 - \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \cdot k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2} = (1 - k) \cdot L_1 = \underbrace{(1 - \sqrt{1 - \sigma})}_{\approx 1 - \frac{\sigma}{2}} \cdot L_1 \\ &\approx \frac{\sigma}{2} \cdot L_1 \end{aligned}$$

2. Nur eine Längsinduktivität

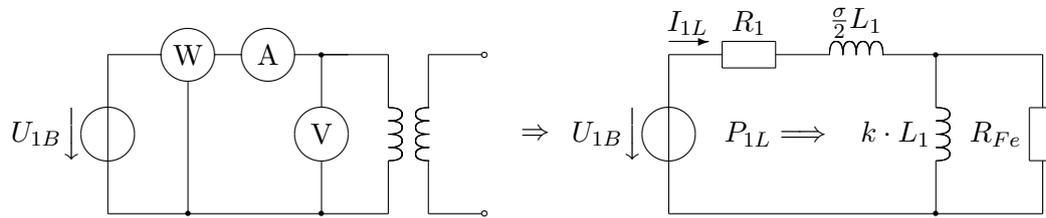
$$\boxed{\alpha^2 \cdot L_2 - \alpha M = 0} \Rightarrow \alpha = \frac{M}{L_2} = \frac{k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2}}{L_2} = k \cdot \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = k \cdot \ddot{u}$$

$$L_1 - \alpha \cdot M = L_1 - k \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \cdot k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2} = L_1 - (1 - k^2) = \sigma L_1$$

7.3 Leistungsübertrager

Bestimmung der Elemente der Ersatzschaltung

7.3.a Leerlaufversuch



Messung: $U_{1B} = 230 \text{ V}$, $U_2 = 2040 \text{ V}$, $I_1 = I_{1L} = 0,83 \text{ A}$, $P_{1L} = 118 \text{ W}$

$$\text{Bei Leerlauf: } P_{1L} \approx P_{Fe} \approx \frac{U_{1B}^2}{R_{Fe}} \rightarrow R_{Fe} \approx \frac{U_{1B}^2}{P_{1L}} = 450 \Omega$$

Scheinleistung: $S_{1L} = U \cdot I = 200 \text{ VA}$

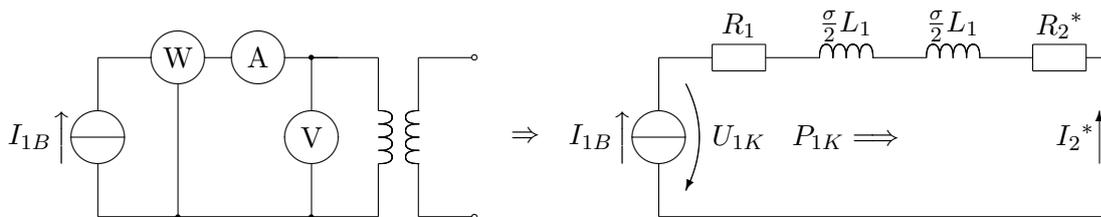
$$\text{Blindleistung: } Q_{1L} = \sqrt{S_{1L}^2 - P_{1L}^2} = 162 \text{ var} \approx \frac{U_{1B}^2}{X_M} = \frac{U_{1B}^2}{\omega L_1}$$

$$\Rightarrow L_1 = \frac{U_{1B}^2}{\omega Q_{1L}} = 1,1 \text{ H}$$

$$\text{Spannungsübersetzung: } \ddot{u} = \frac{U_{1B}}{U_2} = 0,11 = \frac{1}{8,9}$$

\Rightarrow Im Leerlaufversuch werden die Elemente des Querszweiges bestimmt.

7.3.b Kurzschlußversuch



Messung: $I_{1B} = 15 \text{ A}$, $U_{1K} = 14,5 \text{ V}$, $P = 107 \text{ W}$, $I_2 = 1,66 \text{ A}$

$$P_{1K} \approx P_{Cu} = I_{1K}^2 \cdot (R_1 + R_2^*) \rightarrow R_1 + R_2^* = \frac{P_{1K}}{I_{1K}^2} = \frac{P_{1K}}{I_{1K}^2} = 0,5 \Omega$$

Bei gleichem Wickelraum gilt $R_1 = R_2^* = 0,25 \Omega$ (gemessen: $0,29 \Omega$)

$$R_2 = \frac{R_2^*}{\ddot{u}^2} = 18,9 \Omega \text{ (gemessen: } 14,5 \Omega)$$

$$\text{Stromübersetzung: } \ddot{u} = \frac{I_2}{I_{1B}} = 0,11 = \frac{1}{9,0}$$

Scheinleistung: $S_{1K} = U_{1K} \cdot I_{1B} = 14,5 \text{ V} \cdot 15 \text{ A} = 218 \text{ VA}$

Blindleistung: $Q_{1K} = \sqrt{S_{1K}^2 - P_{1K}^2} = 190 \text{ var}$

$$Q_{1K} \approx I_{1B}^2 \cdot X_\sigma = I_{1B}^2 \cdot \omega \sigma L_1 \quad \rightarrow \quad X_\sigma = \frac{Q_{1K}}{I_{1B}^2} = 0,84 \Omega$$

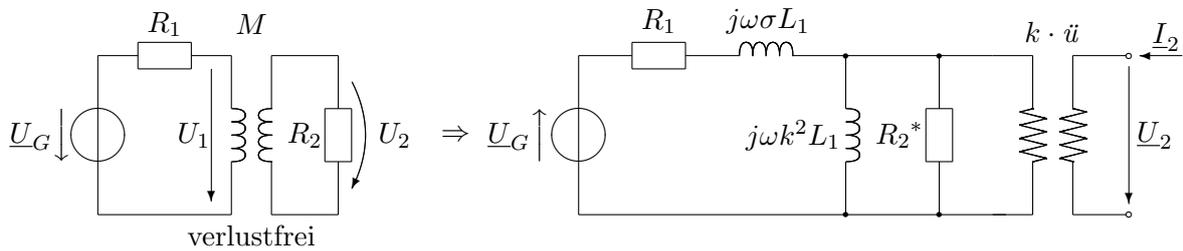
$$\sigma L_1 = \frac{Q_{1K}}{\omega \cdot I_{1B}^2} = 2,7 \text{ mH}$$

Im Kurzschlußversuch werden die Elemente des Längszweiges bestimmt.

$$L_1 = 1,1 \text{ H}, \quad L_2 = \frac{L_1}{\ddot{u}^2} = 83 \text{ H}, \quad M = \frac{L_1}{\ddot{u}} = 9,6 \text{ H},$$

$$\sigma L_1 = 2,7 \text{ mH} \quad \rightarrow \quad \sigma = 2,5 \cdot 10^{-3} \rightarrow k = \sqrt{1 - \sigma} = 0,9988$$

7.4 Signalübertrager: Frequenzverhalten



Annahme: $R_1 = R_2^* = (k \cdot \ddot{u})^2 \cdot R_2$ (Anpassung)

gesucht: Frequenzgänge und Ortskurve von $\frac{U_2}{U_G}$

$$\begin{aligned} \underline{G}(j\omega) &= \frac{U_2}{U_G} = \frac{1}{k\ddot{u}} \frac{U_2^*}{U_G} = \frac{1}{k\ddot{u}} \frac{R_1 \parallel j\omega k^2 L_1}{R_1 + j\omega \sigma L_1 + R_1 \parallel j\omega k^2 L_1} = \frac{1}{k\ddot{u}} \frac{1}{2 + \frac{\sigma}{k^2} + \frac{j\omega \sigma L_1}{R_1} + \frac{R_1}{j\omega k^2 L_1}} \\ &= \frac{1}{k\ddot{u}} \cdot \frac{1}{A(1 + j\varrho v)} = \frac{1}{k\ddot{u}} \cdot \frac{1}{A \left(1 + j\varrho \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)} \end{aligned}$$

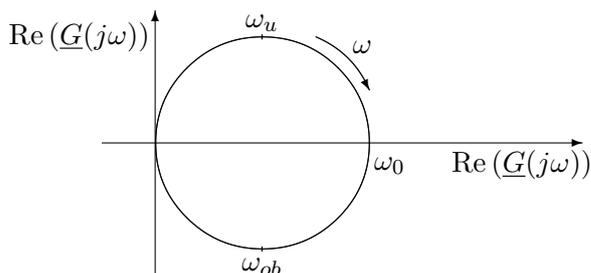
Koeffizientenvergleich

$$\textcircled{1} \omega^0: \quad A = 2 + \frac{\sigma}{k^2} \quad \textcircled{2} \omega: \quad \frac{\sigma L_1}{R_1} = \frac{A\varrho}{\omega_0} \quad \textcircled{3} \frac{1}{\omega}: \quad \frac{R_1}{k^2 L_1} = A \cdot \varrho \cdot \omega_0$$

$$\textcircled{2} \cdot \textcircled{3}: \quad A^2 \cdot \varrho^2 = \frac{\sigma}{k^2} = \frac{\sigma}{1 - \sigma} \quad \rightarrow \quad \varrho^2 = \frac{1}{A^2} \frac{\sigma}{1 - \sigma} \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{\sqrt{\sigma}}{2}$$

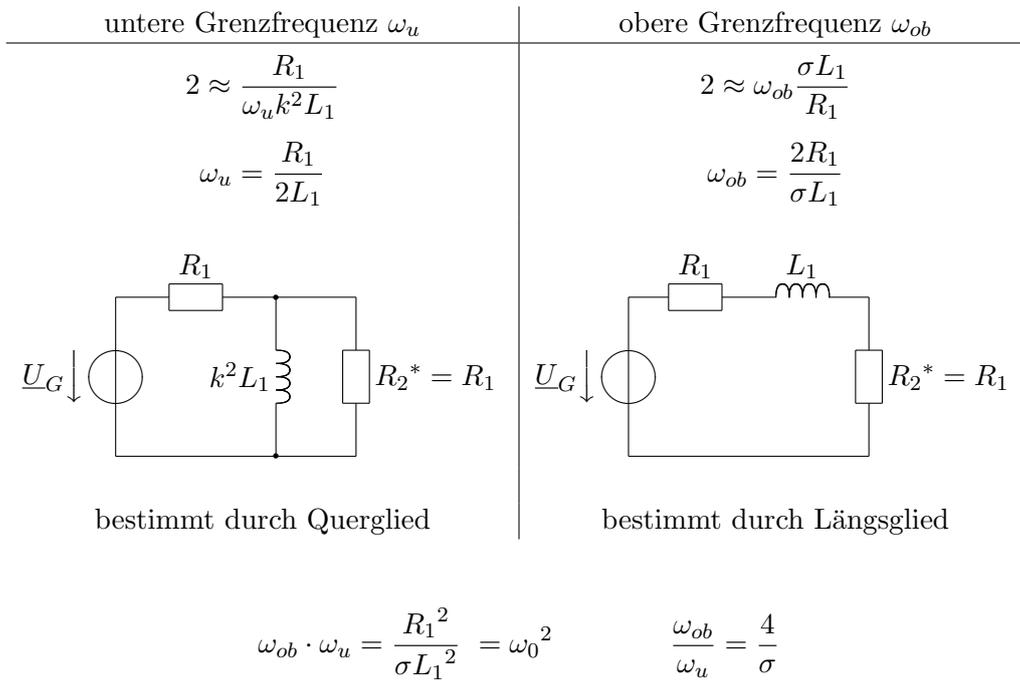
$$\frac{\textcircled{3}}{\textcircled{2}}: \quad \omega_0^2 = \frac{R_1^2}{k^2 \sigma L_1^2} = \frac{R_1^2}{(1 - \sigma) \sigma L_1^2} \approx \frac{R_1}{\sigma L_1^2}$$

Ortskurve



7.4.a Grenzfrequenzen

ω_u und ω_{ob} liegen weit auseinander. \rightarrow Näherung.

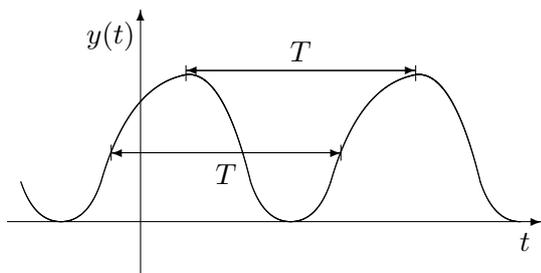


Kapitel 8

Periodische Signale und Netzwerke bei periodischer Erregung

8.1 Periodische Signale

8.1.a Definition: periodisches Signal



Für alle $t_1 < t < t_1 + T$ gilt

$$y(t + kT) = y(t), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

T : Periodendauer, $f = \frac{1}{T}$, $\omega = 2\pi f$

Bezeichnung: $\int_{t_1}^{t_1+T} y(t) dt = \int_0^T y(t) dt = \int_{(T)} y(t) dt$, unabhängig von t_1 .

8.1.b Signalkenngrößen

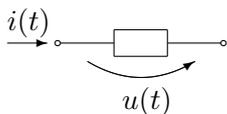
1. (arithmetischer) Mittelwert, Gleichanteil

$$Y_0 = \overline{y(t)} = \frac{1}{T} \int_{(T)} y(t) dt$$

Messung:

- (a) Multimeter mit Einstellung „DC“
- (b) Tiefpassfilter

2. Signalleistung



$$p(t) = i(t) \cdot u(t) = \frac{u^2(t)}{R} = i^2(t) \cdot R$$

mittlere Leistung:

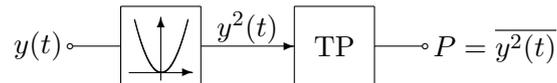
$$P = \frac{1}{T} \int_{(T)} p(t) dt = \overline{p(t)} = \frac{1}{R} \frac{1}{T} \int_{(T)} u^2(t) dt = R \frac{1}{T} \int_{(T)} i^2(t) dt$$

Verallgemeinerung:

$$\boxed{\frac{1}{T} \int_{(T)} y^2(t) dt = \overline{y^2(t)} = P} \quad \text{Def.: Signalleistung}$$

quadratischer Mittelwert (mean squared value): $[P] = \begin{cases} V^2 & \text{wenn } y(t) = u(t) \\ A^2 & \text{wenn } y(t) = i(t) \end{cases}$

Messung:



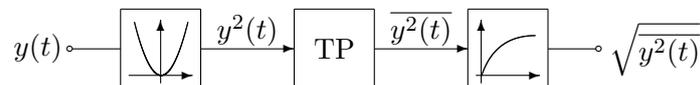
3. Effektivwert (Root mean square value, RMS)

Effektivwert = Wert einer leistungsäquivalenten Größe

$$i^2 \cdot R = R \cdot \frac{1}{T} \int_{(T)} i^2(t) dt \quad \Rightarrow \quad i^2 = \frac{1}{T} \int_{(T)} i^2(t) dt$$

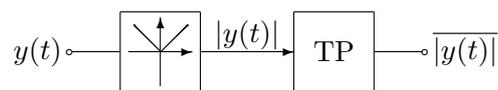
$$\boxed{Y = \sqrt{\overline{y^2(t)}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{(T)} i^2(t) dt}} \quad \text{Def.: Effektivwert}$$

Messung: (True RMS-value measurement)



4. Gleichrichtwert

$$Y_{Gl} = \overline{|y(t)|} = \frac{1}{T} \int_{(T)} |y(t)| dt$$



Meßgerät mit Meßgleichrichter

8.2 Spektraldarstellung periodischer Signale

8.2.a Fourierreentwicklung

$$y(t) = Y_0 + \sum_{n=1}^N \hat{Y}_n \cdot \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) = Y_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t + e(t)$$

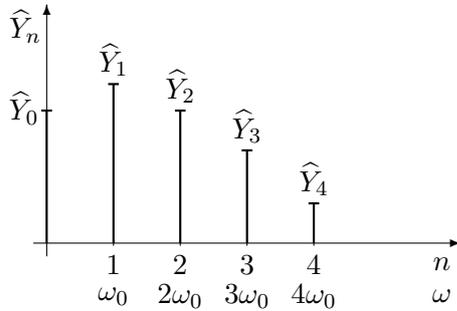
$$\boxed{\hat{Y}_n \cdot e^{j\varphi_n} = A_n - jB_n}$$

Approximationsproblem:

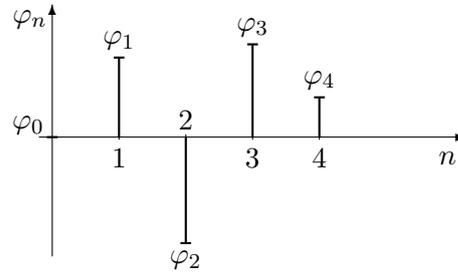
$$\text{Fehler: } E_N = \frac{1}{T} \int_{(T)} e^2(t) dt \quad \Rightarrow \quad \min(A_n, b_n, Y_0, n = 1, 2, \dots, N)$$

$$Y_0 = \frac{1}{T} \int_{(T)} y(t) dt, \quad A_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} y(t) \cos n\omega_0 t dt, \quad B_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} y(t) \sin n\omega_0 t dt$$

8.2.b Amplituden- und Phasenspektrum



Amplitudenspektrum



Phasenspektrum

8.2.c Kenngrößen periodischer Signale im Frequenzbereich

1. Mittelwert

$$Y_0 = \frac{1}{T} \int_{(T)} y(t) dt$$

2. Signalleistung

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_{(T)} y^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{(T)} \left(Y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{Y}_n \cos n(\omega_0 t + \varphi_n) \right) \cdot \left(Y_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \hat{Y}_m \cos m(\omega_0 t + \varphi_m) \right) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{(T)} Y_0^2 + Y_0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \hat{Y}_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \hat{Y}_n \hat{Y}_m \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \cdot \cos(m\omega_0 t + \varphi_m) dt \end{aligned}$$

$$\frac{1}{T} \int_{(T)} \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) dt = 0, \quad \frac{1}{T} \int_{(T)} \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \cdot \cos(m\omega_0 t + \varphi_m) dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{1}{2} & n = m \end{cases}$$

$$P = Y_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{Y}_n^2}{2} = Y_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n^2$$

Signalleistung = Gleichleistung + \sum Leistung der Harmonischen

3. Effektivwert

$$Y = \sqrt{P} = \sqrt{y^2(t)} = \sqrt{Y_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n^2}$$

4. Klirrfaktor

$$k = \frac{\text{Effektivwert der Summe der Oberwellen}}{\text{Effektivwert}}$$

$$k \approx \sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{\infty} Y_n^2}{\sum_{n=1}^{\infty} Y_n^2}} = \sqrt{\frac{Y^2 - Y_1^2}{Y^2}} \quad Y^2 = Y_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n^2 - Y_1^2$$

8.3 Reaktion von Netzwerken auf periodische Signale

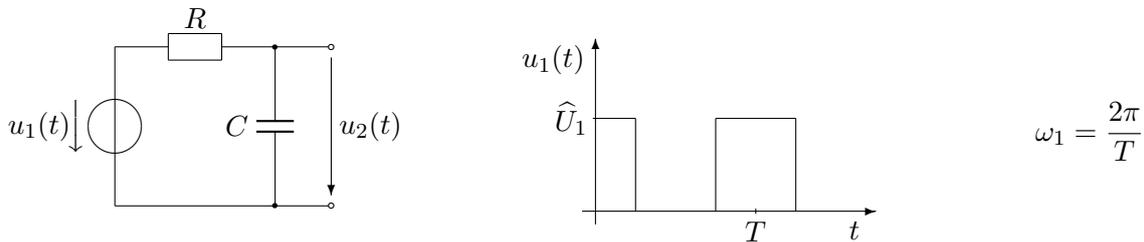
8.3.a Grundprinzip

Die Reaktionen des Netzwerkes auf die einzelnen Harmonischen überlagern sich bei linearen Netzwerken ohne gegenseitige Beeinflussung.

Rechenverfahren

1. Zerlegung des Signals in Harmonische (Fourier-Analyse)
2. Berechnung der Netzwerkreaktion auf jede Harmonische
3. Addition der Teilreaktionen aus 2.

1. Beispiel



1. Fourierreihe für $u_1(t)$

$$u_1(t) = \hat{U}_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos \omega_1 t - \frac{\cos 3\omega_1 t}{3} + \frac{\cos 5\omega_1 t}{5} - \dots + \dots \right) \right)$$

2. Berechnung der Netzwerkreaktion auf jede Harmonische

- (a) Übertragungsfaktor des Filters

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cdot e^{j\varphi}, \quad \tau = RC$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan \omega\tau$$

- (b) Berechnung der Teilreaktionen

$$u_1(t) = \frac{\hat{U}_1}{2} + \frac{\hat{U}_1 \cdot 2}{\pi} \cos \omega_1 t - \frac{\hat{U}_1 \cdot 2}{3\pi} \cos 3\omega_1 t + \dots$$

$\downarrow \underline{G}(0)$

$\downarrow \underline{G}(j\omega_1)$

$\downarrow \underline{G}(j\omega_1 3)$

$$u_2(t) = \frac{\hat{U}_1}{2} + \frac{\hat{U}_1 \cdot 2}{\pi \sqrt{1 + (\omega_1\tau)^2}} \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi(\omega_1)) - \frac{\hat{U}_1 \cdot 2}{3\pi \sqrt{1 + (3\omega_1\tau)^2}} \cdot \cos(3\omega_1 t + \varphi(3\omega_1))$$

Kapitel 9

Schaltvorgänge

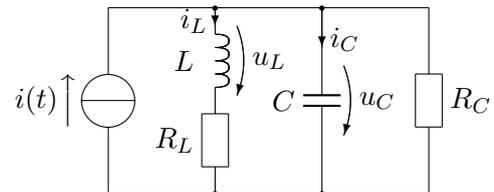
9.1 Zustandgleichungen

Die Zustandgleichungen eines Netzwerkes sind ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Die Variablen in den Differentialgleichungen (Zustandsvariablen) sind die Ströme durch die Induktivitäten und die Spannungen an den Kapazitäten des Netzwerkes. Es gibt so viele Zustandgleichungen, wie das Netzwerk unabhängige Energiespeicher (L , C) enthält.

9.1.a Algorithmus zur Ableitung der Zustandgleichungen aus einem Netzwerk

gegeben: Netzwerk

gesucht: DGLn für alle Ströme durch die Induktivitäten und Spannungen an den Kapazitäten (Zustandsgleichungen)

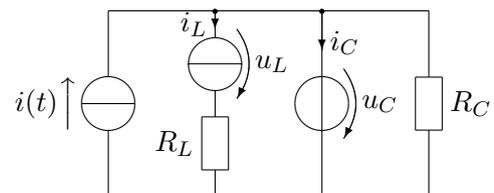


1. Schritt

Ersetzen aller

- Induktivitäten durch Stromquellen und
- Kapazitäten durch Spannungsquellen

Ergebnis: Gleichstromnetzwerk



2. Schritt

Berechnung der Spannungen an den Induktivitäten und Ströme durch die Kapazitäten durch Gleichstromanalyse

Ergebnis: Algebraisches Gleichungssystem

$$u_L = -i_L \cdot R_L + u_C \quad (1)$$

$$i_C = -i_L - \frac{u_C}{R_C} + i \quad (2)$$

3. Schritt

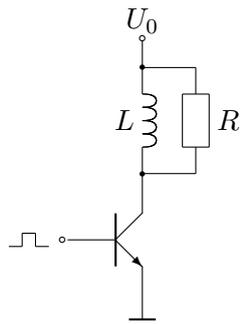
Einführung der u - i -Relationen $i_C = C \frac{du_C}{dt}$ und $u_L = L \frac{di_L}{dt}$ für alle L und C auf den linken Seiten der Gleichungen

$$L \frac{di_L}{dt} = -i_L \cdot R_L + u_C \quad (1)$$

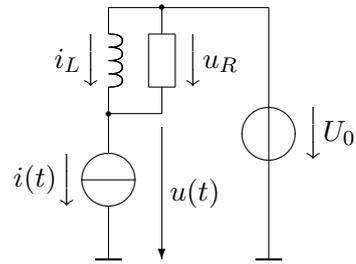
$$C \frac{du_C}{dt} = -i_L - \frac{u_C}{R_C} + i \quad (2)$$

Ergebnis: DGL-System

9.1.b Anwendungsbeispiel: Transistorschalter mit induktiver Last



Ersatzschaltung:



$$\text{gegeben: } i(t) = \begin{cases} I_0 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = I_0(s(t) - s(t - T)), \quad \text{gesucht: } u(t)$$

$$I(s) = \frac{I_0}{s} (1 - e^{-sT}), \quad u_L = u_R = i_R \cdot R, \quad i_R = i - i_L \Rightarrow u_L = (i - i_R) \cdot R$$

$$L \frac{di_L}{dt} = (i - i_L) \cdot R \Rightarrow L \frac{di_L}{dt} + i_L \cdot R = i \cdot R, \quad \text{mit } \tau = \frac{L}{R} :$$

$$\tau \frac{di_L}{dt} + i_L = i \quad \text{mit } i_L(0) = 0 \quad \left| \mathcal{L} \right.$$

$$\tau(I_L \cdot s - i_L(0)) + I_L = I = \frac{I_0}{s} (1 - e^{-sT})$$

$$(1 - s\tau) \cdot I_L = \frac{I_0}{s} (1 - e^{-sT})$$

$$I_L(s) = \frac{I_0}{s(1+s\tau)} - \frac{I_0}{s(1+s\tau)} \cdot e^{-sT} \quad \left| \mathcal{L}^{-1} \right.$$

$$i_L(t) = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) - I_0 \left(1 - e^{-\frac{t-T}{\tau}} \right) \cdot s(t - T)$$

$$i_L(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) & 0 < t < T \\ I_0 \left(e^{\frac{T}{\tau}} - 1 \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} & T \leq t \end{cases} \quad u_L(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{L \cdot I_0}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} & 0 \leq t < T \\ -\frac{L \cdot I_0}{\tau} \left(e^{\frac{T}{\tau}} - 1 \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} & T \leq t \end{cases}$$

$$u(t) = U_0 - u_L(t)$$