Mathematik I/2 für Elektrotechniker – SS 04
Prof. Dr. Sasvári
Mitschrift

Fabian Kurz
http://fkurz.net/

Zuletzt aktualisiert:
30. Juli 2004

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 10

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Variablen

10.1 Grundbegriffe

10.1.1 Der zweidimensionale Raum

Unter dem *zweidimensionalen* Raum $\mathbb{R}^2$ versteht man die Menge aller geordneten Paare reeller Zahlen. Seine Elemente heißen *Punkte*.

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

x und y	:	*kartesische Koordinaten*
$(r,\ \varphi)$	:	*Polarkoordinaten*, $r \geq 0,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Es gilt:

$x = r \cdot \cos\varphi$	$y = r \cdot \sin\varphi$
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\tan\varphi = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$
$\varphi = \frac{\pi}{2}$ wenn $x = 0,\ y > 0$	$\varphi = \frac{3\pi}{2}$ wenn $x = 0,\ y < 0$

Abstand des Punktes $P(x,\ y)$ vom Nullpunkt $(0,\ 0,\ 0)$:

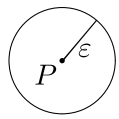
$$|P| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Abstand der Punkte $P_1(x_1,\ y_1)$ und $P_2(x_2,\ y_2)$:

$$|P_1 - P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

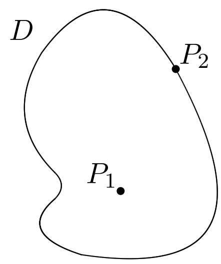
Es sei $P_0 \in \mathbb{R}^2$ und $\varepsilon > 0$. Die Menge

$$U_\varepsilon(P_0) = \left\{ P \in \mathbb{R}^2 : |P - P_0| < \varepsilon \right\}$$



heißt die (offene) ε–*Umgebung* des Punktes P_0 (Kreisscheibe ohne Berandung).

Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$. Der Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ heißt



(a) *innerer Punkt* von D, wenn es eine Umgebung $U_\varepsilon(P)$ gibt, die in D liegt (z.B. P_1)

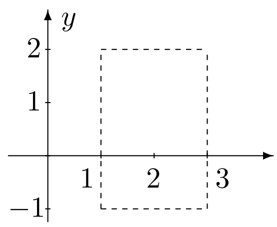
(b) *Randpunkt* von D, wenn in jeder Umgebung $U_\varepsilon(P)$ sowohl ein Punkt von D als auch von $\mathbb{R}^2 \setminus D$ liegt (z.B. P_2)

Die Menge aller Randpunkte heißt der *Rand* von D. Die Menge D heißt *offen*, wenn jeder Punkt $P \in D$ ein innerer Punkt ist. D heißt *abgeschlossen*, wenn $\mathbb{R}^2 \setminus D$ offen ist.

Beispiele

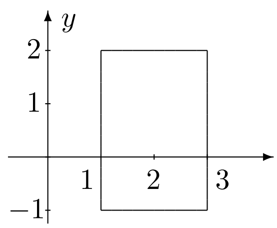
$D_1 = \{(x,\, y) : 1 < x < 3,\ -1 < y < 2\} \subset \mathbb{R}^2$

$(2, 1)$: innerer Punkt
$(1, 1)$: Randpunkt, $(1, 1) \notin D_1$
D_1 ist offen



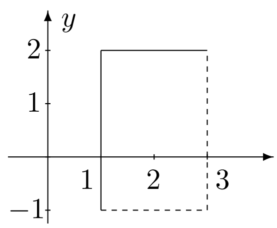
$D_2 = \{(x,\, y) : 1 \le x \le 3,\ -1 \le y \le 2\}$

D_2 ist abgeschlossen



$D_3 = \{(x,\, y) : 1 \le x < 3,\ -1 < y \le 2\}$

D_3 ist weder abgeschlossen noch offen



$D \subset \mathbb{R}^2$ heißt *beschränkt*, wenn es eine Zahl A gibt, so daß für alle $P \in D$ gilt $|P| \le A$, andernfalls heißt D *unbeschränkt*.

10.1.2 Der drei– und der n–Dimensionale Raum

Unter dem *dreidimensionalen Raum* $\mathbb{R}^3$ versteht man die Menge aller geordneten Tripel reeller Zahlen.

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,\, y,\, z) : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\}$$

Abstand der Punkte $P_1 = (x_1,\, y_1,\, z_1)$ und $P_2 = (x_2,\, y_2,\, z_2)$:

$$|P_1 - P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Die Definitionen aus 10.1.1. lassen sich einfach auf $\mathbb{R}^3$ übertragen (ε–Umgebung, innerer Punkt, …).

Zylinderkoordinaten $(r,\, \varphi,\, z)$

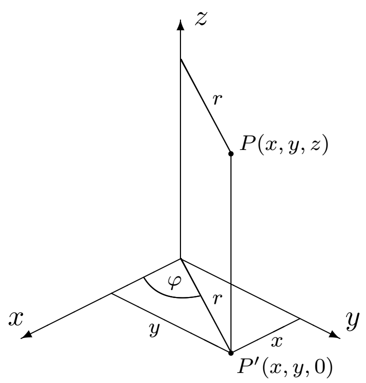
Es sei $P = (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$.

Dann bezeichnen:

r den Abstand des Punktes P von der z–Achse. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

φ den Winkel der Strecke von $(0,\, 0,\, 0)$ nach $P' = (x,\, y,\, 0)$ gegen die positive Richtung der x–Achse, im mathematisch positiven Sinn mit $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

z wie bei den kartesischen Koordinaten



Umrechnungsformeln

$x = r \cdot \cos\varphi$

$y = r \cdot \sin\varphi$

$z = z$

Kugelkoordinaten $(r,\, \varphi,\, \vartheta)$

Es sei $P = (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$.

Dann bezeichnen:

r den Abstand des Punktes P vom Ursprung $(0,\, 0,\, 0)$.

φ wie bei den Zylinderkoordinaten

ϑ der Winkel, den die Strecke vom Ursprung $(0,\, 0,\, 0)$ nach $P \neq (0,\, 0,\, 0)$ mit der positiven Richtung der z–Achse bildet, wobei $0 \leq \vartheta \leq \pi$.

Das sind die sogenannten *astronomischen Kugelkoordinaten*. Geographische Kugelkoordinaten: $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \vartheta$.

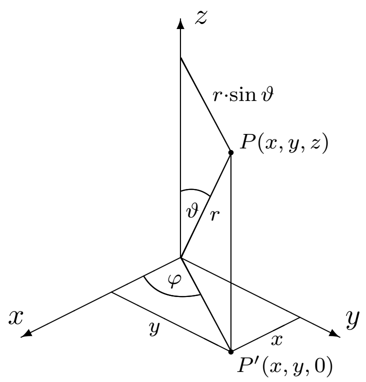
Umrechnungsformeln

$x = r \cdot \cos\varphi \cdot \sin\vartheta$

$y = r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\vartheta$

$z = r \cdot \cos\vartheta$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$



10.1.3 Beispiele

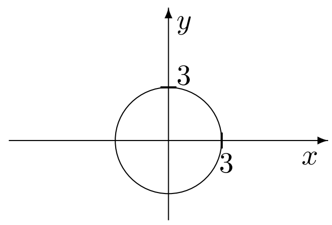
(a) Die Kreisscheibe

$$D = \left\{(x,\, y) : x^2 + y^2 < 9\right\}$$

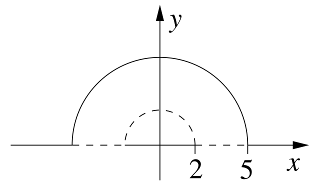
wird in Polarkoordinaten durch

$$0 \leq r < 3 \qquad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

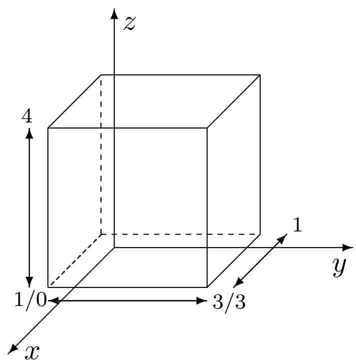
beschrieben.



(b) $$2 < r \leq 5 \qquad 0 < \varphi < \pi$$



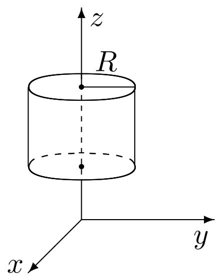
(c) Die Menge $\{(x,\, y,\, z) : 1 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 3,\ 1 \leq z \leq 4\}$ ist ein Quader.



(d) Der Kreiszylinder ist durch ein System von Ungleichungen zu beschreiben.

$$Z = \left\{(x,\, y,\, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \le R,\, 1 \le z \le 4\right\}$$

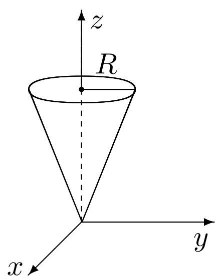
$$Z = \left\{(x,\, y,\, z) : -R \le x \le R,\ \sqrt{R^2 - x^2} \le y \le \sqrt{R^2 - x^2}\right\}$$



In Zylinderkoordinaten:

$$0 \le r \le R, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad 1 \le z \le 4$$

(e) Der Kegel ist in Zylinderkoordinaten zu beschreiben



$$0 \le r \le R$$

$$0 \le \varphi < 2\pi$$

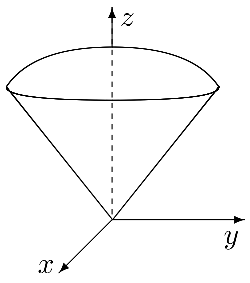
$$\frac{h}{R} \cdot r = z \le h$$

(f) Eine Kugel vom Radius R mit Mittelpunkt $(0,\, 0,\, 0)$ wird in Kugelkoordinaten $(r,\, \varphi,\, \eta)$ durch

$$a \le r \le R, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad 0 \le \eta < 2\pi$$

beschreiben.

(g) Kugelausschnitt mit dem Öffnungswinkel $\frac{\pi}{2}$



$$0 \le r \le R, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad 0 \le \eta \le \frac{\pi}{4}$$

10.1.4 Definition

Unter dem *n–Dimensionalen Raum* $(n = 1, 2, \ldots)$ versteht man die Menge aller geordneten n–Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ reeler Zahlen. Die Zahl

$$|P - Q| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

heißt der *Abstand* der Punkte $P = (x_1, \ldots, x_n)$ und $Q = (y_1, \ldots, y_n)$. Man übernimmt die Bezeichnungen aus dem dreidimensionalen Fall. $U_\varepsilon(P)$ heißt eine (n–dimensionale) *Kugel* vom Radius ε mit Mittelpunkt P.

Es sei $P_k = \left(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right)$, $k = 1, 2, \ldots$ eine Punktfolge in $\mathbb{R}^n$ und $P = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Die Punktfolge $\left\{P_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ heißt *konvergent* gegen den Punkt P wenn $\lim\limits_{k\to\infty} |P_k - P| = 0$.

Schreibweise: $\lim\limits_{k\to\infty} P_k = P$

Man kann zeigen:

$$\lim_{k\to\infty} P_k = P \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = a_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

10.1.5 Beispiele

(a)

$$\begin{array}{rcccccccl} P_k = & \Big(& \frac{k}{k+1} & , & \left(\frac{2}{3}\right)^k & , & \frac{2}{k} & \Big) & \in \mathbb{R}^3 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ P = & \Big(& 1 & , & 0 & , & 0 & \Big) & \end{array}$$

$$\lim_{k\to\infty} P_k = (1, 0, 0)$$

(b) $P_k = \left(\frac{1}{k}, k\right) \in \mathbb{R}^3$

nicht konvergent (die Punkte P_k liegen auf der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$).

$\{P_k\}$ ist unbeschränkt.

(c) $P_k = (\cos k, \sin k) \in \mathbb{R}^2$

$|P_k| = 1$ Punkte liegen auf Einheitskreis.

Man kann zeigen: $\{P_k\}$ ist nicht konvergent.

10.2 Stetige Funktionen mehrerer Variablen

Im Folgenden: $D_f \subset \mathbb{R}^n$: Definitionsbereich der Funktion $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$

10.2.1 Beispiele

(a)
$$f(x,\, y,\, z) = x + \frac{y \cdot z}{y + z}$$
$$D_f = \{(x,\, y,\, z) : y + z \neq 0\} = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{die Ebene } y + z = 0\}$$

(b)
$$f(x,\, y) = (x-2)^2 + 2y \qquad D_f = \mathbb{R}^2$$

(c)
$$f(x,\, y) = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} \qquad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

Mit Polarkoordinaten $(r,\, \varphi)$:

$$x = r \cdot \cos\varphi, \quad y = r \cdot \sin\varphi, \quad r^2 = x^2 + y^2$$
$$f(x,\, y) = \frac{r \cdot \cos\varphi \cdot r \cdot \sin\varphi}{r^2} = \cos\varphi \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot \sin 2\varphi$$

$\Rightarrow |f(x,\, y)| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow f$ ist beschränkt. Funktionswert unabhängig vom Abstand zu $(0,\, 0,\, 0)$.

10.2.2 Definition

Eine Funktion f heißt *im Punkt* $P \in D_f$ *stetig*, wenn für jede gegen P konvergierende Punktfolge $\{P_K\}$ gilt:

$$\lim_{K \to \infty} f(P_K) = f(P)$$

f heißt *in* D_f *stetig*, wenn f in jedem Punkt P aus D_f stetig ist.

Äquivalente Definition: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle Punkte Q aus $U_\delta(P) \cap D_f$ gilt:

$$|f(P) - f(Q)| < \varepsilon$$

10.2.3 Beispiele

(a) Die Funktion $f(x,\, y,\, z) = x$ ist auf $\mathbb{R}^3$ stetig.

Die Funktion $f(x,\, y) = x \cdot y$ ist auf $\mathbb{R}^2$ stetig.

(b) Die Funktion $f(x,\, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,\, y) \neq (0,\, 0) \\ 0 & (x,\, y) = (0,\, 0) \end{cases}$ ist im Punkt $P(0,0)$ nicht stetig.

Wähle $P_K = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ die gegen $(0, 0)$ konvergiert. Dann ist

$$f(P_K) = \frac{\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k}}{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0)$$

Wähle $P_K = \left(\frac{1}{k}, \frac{a}{k}\right)$, $y = ax$. Dann ist

$$f(P_K) = \frac{\frac{a}{k^2}}{\frac{1}{k^2} \cdot (1 + a^2)} = \frac{a}{(1 + a^2)} = \frac{1}{2} \neq 0 \text{ für } a \neq 0$$

(c) Die Funktion $f(x, y) = \begin{cases} \frac{(xy)^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ ist stetig auf $\mathbb{R}^2$.

Wähle $P_K = (x_k, y_k)$ beliebig.

$$\lim_{x_k, y_k \to 0} \frac{(x_k y_k)^2}{{x_k}^2 + {y_k}^2} = \lim_{x_k, y_k \to 0} \frac{1}{\left(\frac{1}{x_k}\right)^2 + \left(\frac{1}{y_k}\right)^2} = 0$$

10.2.4 Satz

$(f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R})$

(i) Sind f und g stetig im Punkt P, so sind auch $f + g$, $f \cdot g$ und $c \cdot g$ $(c \in \mathbb{R})$ in P stetig.

(ii) Ist $g(P) \neq 0$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ in P stetig.

(iii) Ist die Funktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ stetig, so ist auch $F(f)$ in P stetig.

Beispiele:

$e^{x^2+y^2}$ ist stetig auf $\mathbb{R}^2$

$\sin(x^2 + y^2 + e^z)$ ist stetig auf $\mathbb{R}^3$

10.2.5 Definition: Beschränktheit

Die auf $D_f \subset \mathbb{R}^n$ definierte Funktion f heißt *beschränkt*, wenn es eine Zahl A gibt, so daß für alle $P \in D_f$ gilt:

$$|f(P)| \leq A$$

Beispiele:

(a) $f(x, y) = \sin(x + e^{xy}) \qquad |f(x, y)| \leq 1 \Rightarrow f$ ist beschränkt

(b) Die Funktion $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$

$$f(x, y) = \tilde{f}(r, \varphi) = \frac{r^2 \cos\varphi \sin\varphi}{r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \cos\varphi \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} \sin 2\varphi$$

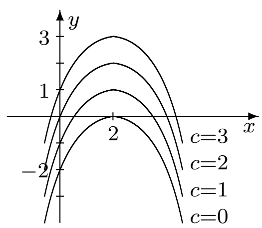
10.2.6 Satz

Der Wertebereich einer auf einer abgeschlossenen beschränkten Menge stetigen Funktion ist beschränkt. Die Funktion nimmt auf dieser Menge ihr Maximum und auch ihr Minimum an.

Beispiel: Die Funktion $f(x, y) = \dfrac{1}{x} + y$ ist auf der Menge $D_f = \{(x, y) : 0 < x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1\}$ stetig aber nicht beschränkt, da D_f *nicht* abgeschlossen ist.

10.2.7 Höhenlinien (Niveaulinien), Niveauflächen

(a) $f(x, y) = (x-2)^2 + 2y \qquad D_f = \mathbb{R}^2$



In der x–y–Ebene markieren wir alle Punkte mit gleichem Funktionswert c.

$(x-2)^2 + 2y = c \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{c}{2}$

(b) $(f(x, y, z)\ , c \in \mathbb{R})$ Die Menge aller Punkte $(x, y, z) \in D_f = \mathbb{R}^3$ für die $f(x, y, z) = c$ ist, heißt *Niveaufläche.*

Beispiel: $f(x, y, z) = \dfrac{1}{[(x+2)^2 + (y+3)^2 + z^2]^2} = c \qquad c > 0$

$(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = \sqrt{\frac{1}{c}}$: Kugelfläche vom Radius $\left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{4}}$ um den Mittelpunkt $(2, -3, 0)$.

Im Fall $c \leq 0$ ist die Niveaufläche die leere Menge.

10.3 Partielle Ableitungen

Graphische Darstellung einer Funktion f von einer Variablen: Kurve mit den Punkten $(x, f(x)),\ x \in D_f$.

Graphische Darstellung einer Funktion von zwei Variablen: Fläche mit den Punkten $(x, y, f(x, y)) \in D_f$. Die Frage „Welche Steigung hat die Fläche an der Stelle $(x, y, f(x, y)) = (P_0, f(P_0))$?“ ist sinnlos, denn die Steigung hängt von der Richtung ab, in der man sich von $(P_0, f(P_0))$ aus bewegt. Sinnvoll ist aber die Frage „Welche Steigung hat die Fläche in Richtung der x–Achse und welche in Richtung der y–Achse?“ oder „In welcher Richtung ist der Anstieg am größten?“

10.3.1 Definition

Es sei f eine auf der offenen Menge $D_f \in \mathbb{R}^2$ definierte Funktion und im Punkt $P_0(x_0, y_0) \in D_f$ gegeben.

Die Funktion f heißt in diesem Punkt P_0 nach x *partiell differenzierbar*, wenn die Funktion $x \to f(x,\, y_0)$ im Punkt x_0 differenzierbar ist. Deren Ableitung heißt *partielle Ableitung* von f nach x im Punkt P_0.

Schreibweise: $f_x(P_0)$ oder $\dfrac{\partial f}{\partial x}$

Bemerkung:

(a) f_x liest man „f partiell nach x“ oder „f nach x“

(b) $f_x(x_0, y_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h,\, y_0) - f(x,\, y_0)}{h}$

$f_y(x_0, y_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0,\, y+h) - f(x_0,\, y)}{h}$

10.3.2 Definition

Es sei f eine auf der offenen Menge $D_f \subset \mathbb{R}^n$ definierte Funktion, $P_0 = (u_1,\, u_2,\, \dots\,,\, u_n) \in D_f$.

f heißt im Punkt P_0 nach x_i *partiell differenzierbar*, wenn $x \longrightarrow f(u_1,\, u_2,\, \dots\,,\, u_{i-1},\, u_i,\, u_{i+1},\, \dots\,,\, u_n)$ an der Stelle u_i differenzierbar ist. Ihre Ableitung an der Stelle u_i heißt dann die partielle Ableitung von f nach x_i im Punkt P_0.

Schreibweise: $f_{x_i}(P_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)$

10.3.3 Beispiel

$$
\begin{aligned}
f(x,\, y,\, z) &= \sin^2 x + z \cdot e^y \cdot \sqrt{x} + 23 \\
f_x(x,\, y,\, z) &= 2 \sin x \cos x + z \cdot e^y \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \\
f_y(x,\, y,\, z) &= z \cdot e^y \cdot \sqrt{x} \\
f_z(x,\, y,\, z) &= e^y \cdot \sqrt{x}
\end{aligned}
$$

10.3.4 Definition

f sei eine auf der offenen Menge $D_f \subset \mathbb{R}^n$ definierte Funktion und dort nach x partiell differenzierbar. Wenn f_{x_i} in $P \in D_f$ nach x_i partiell differenzierbar ist, so heißt diese Ableitung die *zweite partielle Ableitung* von f nach x_i, x_j im Punkt P. Schreibweise: $f_{x_i x_j}(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P)$.

10.3.5 Beispiel

Gegeben sei die Funktion: $f(x,y,z) = x^2y + z \cdot \sin(x+y^2)$

Erste partielle Ableitungen:

$f_x(x,y,z) = 2xy + z \cdot \cos(x+y^2) \cdot 1$
$f_y(x,y,z) = x^2 + z \cdot \cos(x+y^2) \cdot 2y$
$f_z(x,y,z) = 0 + \cos(x+y^2)$

Zweite partielle Ableitungen:

$$\left.\begin{aligned} f_{xy} &= 2x - 2yz \cdot \sin(x+y^2) \\ f_{yx} &= 2x - 2yz \cdot \sin(x+y^2) \end{aligned}\right\} f_{xy} = f_{yx}$$

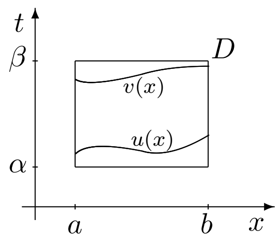
$f_{zz} = 0$

10.3.6 Satz

Die Funktion f sei auf der offenen Menge $D_f \subset \mathbb{R}^n$ definiert und dort mögen sämtliche partielle Ableitungen bis zur Ordnung k existieren und stetig sein. Dann hängen die partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k$ nicht von der Reihenfolge der Differentiation ab.

10.3.7 Satz (Leibnitzsche Regel)

Sei $D_f = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \alpha \leq t \leq \beta\}$ und g eine auf D definierte stetige Funktion, g_x auf D stetig. Ferner seien u und v auf $[a,b]$ stetig differenzierbare Funktionen und für alle $x \in [a,b]$ sei $\alpha \leq u(x) \leq \beta$ und $\alpha \leq v(x) \leq \beta$. Dann wird durch



$$f(x) = \int\limits_{u(x)}^{v(x)} g(x,t)\ dt$$

eine auf $[a,b]$ differenzierbare Funktion definiert. Weiterhin gilt

$$f'(x) = \int\limits_{u(x)}^{v(x)} g(x)(x,t)\ dt + g(x,\ v(x)) \cdot v'(x) - g(x,u(x)) \cdot u'(x) \qquad (x \in [a,b])$$

Spezialfälle

- $\frac{d}{dx} \int\limits_c^d g(x,t)\, dt = \int\limits_c^d g_x(x,t)\, dt$
- $\frac{d}{dx} \int\limits_c^x g(x,t)\, dt = \int\limits_c^x g_x(x,t)\, dt + g(x,x) \cdot 1$

10.3.8 Beispiel

$$f(x) = \int\limits_{x}^{x^2} e^{(x-t)^2}\, dt \qquad f'(x) = ?$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int\limits_{x}^{x^2} \underbrace{2\cdot(x-t)\cdot e^{(x-t)^2}}_{\text{Subst. } y=x-t}\, dt + e^{(x-x^2)}\cdot 2x - 1 \\ & \quad [\ldots] \\ &= (2x-1)\cdot e^{(x-x)^2} \end{aligned}$$

10.4 Extrema der Funktionen mehrerer Variablen

10.4.1 Definition

Die Funktion f sei auf $D_f \subset \mathbb{R}^n$ definiert und $P_0 \in D_f$. Wenn $f(P_0) \geq f(P)$

(i) für alle $P \in D_f$ gilt, so sagt man, f habe in P_0 ein *absolutes Maximum.*

(ii) für alle $P \in D_f \cap U$ gilt, wobei U eine geeignete Umgebung von P_0 ist, so sagt man, f habe in P_0 ein *lokales (relatives) Maximum.*

Die Zahl $f(P_0)$ ist dann (absolutes oder relatives) *Maximum* von f.

Absolutes Minimum, lokales Minimum analog.

Beispiel

$f(x,y) = (x-3)^2 + y^4 \qquad D_f \in \mathbb{R}^2$

$f(x,y) \geq 0 \quad (\forall x,y), \quad f(3,0) = 0$

$\Rightarrow$ absolutes Minimum im Punkt $P_0 = (3,0)$

10.4.2 Satz

Die Funktion f sei auf der offenen Menge $D_f \subset \mathbb{R}^n$ definiert und besitze in $P \in D_f$ ein relatives Extremum. Wenn die partielle Ableitung f_{x_i} in P existiert, so ist sie Null.

Beweis: f hat in $P = (a_1, \ldots, a_n)$ ein relatives Extremum $\Rightarrow g(x) = (a_1, \ldots, a_{i-1}, x, \ldots, a_n)$ hat an der Stelle a_i ein relatives Extremum $\Rightarrow g'(a_i) = 0 = f_{x_i}(a_1, \ldots, a_n)$

10.4.3 Beispiel

Gesucht sind die Extrema der Funktion $f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 + y^2$.

$$f_x = 6x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oder } x = 1$$
$$f_y = 2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

Die beiden Lösungen $P_1 = (0,0)$ und $P_2 = (1,0)$ sind Kandidaten für relative Extrema.

10.4.4 Satz

Die Funktion f sei auf der offenen Menge $D_f \subset \mathbb{R}^2$ definiert, im Punkt $P \in D_f$ seien alle partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetig, ferner sei $f_x(P) = f_y(P) = 0$ und $\Delta(P) = f_{xx}(P) \cdot f_{yy}(P) - f_{xy}(P)^2$.
Dann gilt:

(i) Ist $\Delta(P) > 0$, so besitzt f in P ein relatives Extremum, und zwar ein relatives Maximum, wenn $f_{xx}(P) < 0$ (bzw. $f_{yy}(P) < 0$) ist, ein relatives Minimum, wenn $f_{xx}(P) > 0$ (bzw. $f_{yy}(P) > 0$) ist

(ii) Ist $\Delta(P) < 0$, so hat f in P kein Extremum

(iii) Im Fall $\Delta(P) = 0$ kann ein Extremum vorliegen oder nicht.

10.4.5 Beispiele

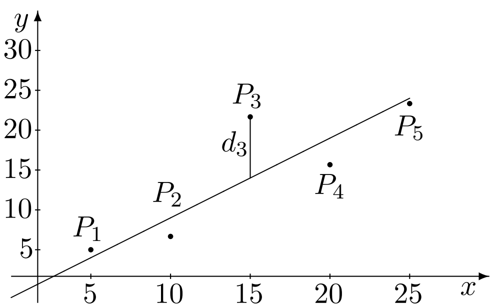
f aus 10.4.3

$$f_{xx} = 12x - 6, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{xy} = 0 \quad \Rightarrow \Delta(x,y) = 24x - 12$$

$$\Delta(0,0) = -12 < 0 \quad \Rightarrow \text{keine Extremstelle}$$
$$\Delta(1,0) = 12 > 0, \quad f_{yy}(1,0) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \text{rel. Maximum}$$

10.4.6 Anwendung: Ausgleichsrechnung

Gegeben seien n Produkte $P_i = (x_i, y_i)$ $i = 1, \ldots, n$ $(n > 1)$ die x_i seien nicht alle einander gleich. Es soll eine Gerade $g : y = ax + b$ durch diese Punkte so gelegt werden, daß sie „möglichst gut“ hindurch geht.



Der Punkt P_i hat in y–Richtung den Abstand $d_i = |ax_i + b - y_i|$ von g. „Möglichst gute“ Annäherung heißt, die Summe

$$\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 = f(a, b)$$

soll klein sein, d.h. a und b sollen so bestimmt werden, daß $f(a, b)$ das absolute Minimum annimmt (*Methode der kleinsten Quadrate*).

Notwendige Bedingung: $f_a(a, b) = 0 \quad f_b(a, b) = 0)$

$$\begin{aligned} f_a(a,b) &= \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y) \cdot x_i = 2\left[a \cdot \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right] = 0 \\ f_b(a,b) &= 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y) = 2\left[a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + n \cdot b - \sum_{i=1}^{n} y_i\right] = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ lineares Gleichungssystem für a und b. Lösung:

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Beispiel: An eine Feder hängt man ein Gewicht, sie wird gedehnt. Die Länge y der Feder wird in Abhängigkeit vom Gewicht x gemessen.

Hooksches Gesetz: $y = ax + b$ Anzahl der Messwerte: $n = 6$

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
x	5	10	15	20	25	30
y	34	52	66	79	97	110

$\Rightarrow a \approx 3,02$ und $b \approx 20,2 \quad \sum {d_i}^2 = 9,37$

10.4.7 Extrema mit Nebenbedingungen

Ein Punkt bewege sich in der Ebene $x + y + z = 0$, sein Abstand zum Nullpunkt betrage A. Welches ist sein kleinst– bzw. größtmöglicher Abstand von der z–Achse?

Abstand von der z–Achse: $\sqrt{x^2 + y^2}$

Aufgabe: $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} \longrightarrow$ Maximum, Minimum

Nebenbedingungen: $x + y + z = 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

Allgemeine Berechnung

Aufgabe: $f(x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow$ Extremstellen berechnen

Nebenbedingungen:

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0$$
$$\vdots$$
$$g_k(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

Lösungsmethode

(Multiplikatorenregel von Lagrange)

1. Man setzt
$$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \cdot g(x_1, \ldots, x_n)$$
2. Dann wird das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) &= 0 && (i = 1, \ldots, n) \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_i}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) &= g_j(x_1, \ldots, x_n) = 0 && (j = 1, \ldots, k) \end{aligned}$$
gelöst.
3. An den gefundenen Stellen $(x_1, \ldots, x_n)$ können die Extremstellen liegen.

10.4.8 Beispiel

wie oben: $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} = r$

$$f_x = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x = \frac{x}{r} \qquad f_y = \frac{y}{r} \qquad f_z = 0$$

$$F(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 + 1) + \lambda_2(x + y + z)$$

Es ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} F_x = \frac{x}{r} + 2x\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 && (a) \\ F_y = \frac{y}{r} + 2y\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 && (b) \\ F_z = 0 + 2z\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 && (c) \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0 && (d) \\ x + y + z &= 0 && (e) \end{aligned}$$

Lösung des Gleichungssystems:

$(a) \cdot y - (b) \cdot x : (y - x) \cdot \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$ oder $y = x$

(1) $\lambda_2 = 0$: A aus (c) folgt dann: $z \cdot \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ oder $z = 0$

(1.1) $z = 0$ dann folgt aus

$(e) \Rightarrow x = -y$

$(d) \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Longrightarrow P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right) \quad P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$

(1.2) $\lambda_1 = 0$ dann folgt aus

(a) und $(b) \Rightarrow x = y = 0$

$(e) \Rightarrow z = 0$ dann ist aber (d) nicht erfüllt!

(2) $y = x$ dann folgt aus

(e) und $(d) \Rightarrow x = y = \pm\frac{\sqrt{6}}{6};\ z = \mp\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\Longrightarrow P_1\left(\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{6}; -\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \quad \Longrightarrow P_2\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}; -\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

$f(P_1) = f(P_2) = 1 \qquad f(P_3) = f(P_4) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Aus geometrischen Gründen ist klar: P_1 und P_2 haben den größten Abstand, P_3 und P_4 haben den kleinsten Abstand.

10.5 Vollständiges Differential, Anwendungen

In diesem Abschnitt: $D_f \subset \mathbb{R}^n$ ist offen, f_{x_i} stetig.

Im Abschnitt 5.3. haben wir gesehen:

$$f(x - h) - f(x) \approx f'(x) \cdot h$$

(h „klein“), $f'(x) \cdot h$: Differential von f an der Stelle x zum Zuwachs h.

Jetzt werden wir die Differenz (n beliebig)

$$f(x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n) - f(x_1, \ldots, x_n)$$

abschätzen (h „klein“).

10.5.1 Definition

Es sei $P = (x_1, \ldots, x_n) \in D_f$. Man nennt

$$df(P) = f_{x_1}(P) \cdot h_1 + \cdots + f_{x_n}(P) \cdot h_n$$

vollständiges (oder *totales*) *Differential* von f an der Stelle P zum Zuwachs $(h_1, \ldots, h_n)$. Oft schreibt man dx_i anstelle von h_i:

$$df(P) = f_{x_1}(P) \cdot dx_1 + \cdots + f_{x_n}(P) \cdot dx_n$$

Sind die Zuwächse dx_i klein, so gilt:

$$f(x_1 + dx_1, \ldots, x_n + dx_n) - f(x_1, \ldots, x_n) \approx df(P)$$

oder

$$f(x_1 + dx_1, \ldots, x_n + dx_n) \approx f(x_1, \ldots, x_n) + df(P)$$

10.5.2 Beispiel

(a) $f(x, y) = 2x^2 + xy^2 \qquad P = (3; -1)$

Vollständiges Differential im Punkt P:

$$df(P) = f_x(P)dx + f_y(P)dy = 13dx + 6dy$$

$$(f_x = 4x + y^2 \qquad f_y = 2xy)$$

(b) Man berechne näherungsweise: $1{,}002 \cdot 2{,}003^2 \cdot 3{,}004^3$

Ansatz: $f(x, y, z) = x \cdot y^2 \cdot z^3$

$x_0 = 1,\ y_0 = 2,\ z_0 = 3 \ \Rightarrow\ P = (x_0, y_0, z_0) = (1,\ 2,\ 3)$

$f(P) = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 = 108$

$dx = 0,002,\ dy = 0,003,\ dz = 0,004 \Rightarrow f(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz)$

$f(1{,}002,\ 2{,}003,\ 3{,}004) \approx f(P) + f_x(P)dx + f_y(P)dy + f_z(P)dz =$

$108 + {y_0}^2 \cdot {z_0}^3 \cdot dx + 2x_0 \cdot y_0 \cdot {z_0}^3 \cdot dy + 3x_0 \cdot {y_0}^2 \cdot {z_0}^2 \cdot dz = 108{,}972$

Analog kann man näherungsweise $\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3}$ $(x_0 = 1,\ y_0 = 2)$ oder $0{,}97^{1{,}05}$ $(x_0 = y_0 = 1)$ berechnen.

10.5.3 Definition: Tangentialebene

Die Ebene E mit der Gleichung

$$z = f(P_0) + f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) \qquad (P_0 = (x_0, y_0) \in D_f)$$

heißt die *Tangentialebene*, die durch $z = f(x, y)$ definierte Fläche im Flächenpunkt $(x_0, y_0, \underbrace{f(x_0, y_0)}_{z_0})$.

Die Tangentialebene geht durch einen Punkt (x_0, y_0, z_0) und *berührt* die Fläche im folgenden Sinne: Jede zur xy–Ebene senkrechte Ebene S durch den Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ schneidet die Tangentialebene E in einer Geraden, die Tangente an die Schnittkurve von S mit der Fläche ist (z.B. die Ebenen $x = x_0$ oder $y = y_0$).

Beispiel

$z = f(x, y) = 2x^2 + xy^2 \qquad P(3,\, -1,\, f(3,\, -1)) = (3,\, -1,\, 21)$
$f_x = 4x + y^2 \quad \Rightarrow \quad f_x(3, -1) = 13$
$f_y = 2xy \quad \Rightarrow \quad f_y(3, -1) = -6$
Tangentialebene: $z = 21 + 13 \cdot (x - 3) - 6 \cdot (y + 1) = 13x - 6y - 24$

10.5.4 Für implizit angegebene Funktionen

Oft ist eine Fläche in der impliziten Form $F(x, y, z) = 0$ gegeben. Zum Beispiel: Kugelfläche (Radius 1): $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Dann lautet die Gleichung der Tangentialebene im Punkt (x_0, y_0, z_0):

$$(x - x_0) \cdot F_x(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \cdot F_y(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \cdot F(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Beispiel: F wie oben, (x_0, y_0, z_0) beliebig. Tangentialebene:

$$(x - x_0) \cdot 2x_0 + (y - y_0) \cdot 2y_0 + (z - z_0) \cdot 2z_0 = 0$$

Speziell: $x_0 = 1$, $y_0 = z_0 = 0 : 2(x - 1) = 0$ oder die Ebene $x = 1$.

10.5.5 Definition: Differentialform

Es seien $Q_1, \ldots, Q_n$ auf der offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ definierte stetige Funktionen. Dann heißt der Ausdruck

$$Q_1(x_1, \ldots, x_n) \cdot dx_1 + \cdots + Q_n(x_1, \ldots, x_n) \cdot dx_n$$

eine *Differentialform* (ein vollständiges Differential ist zum Beispiel eine Differentialform). Eine wichtige Frage: Unter welchen Bedingungen über Q_i ist eine Differentialform vollständiges Differential einer Funktion f (d.h. $Q_1 = f_{x_1}, \ldots, Q_n = f_{x_n}$)?

10.5.6 Satz

Wenn die Funktionen $Q_1, \ldots, Q_n$ stetige partielle Ableitungen besitzen, so ist $Q_1 \cdot dx_1 + \cdots + Q_n dx_n$ genau dann vollständig differenzierbar, wenn

$$\frac{\partial Q_i}{x_j} = \frac{\partial Q_j}{x_i} \qquad (i,\, j = 1, \ldots, n)$$

erfüllt ist.

10.5.7 Beispiele

(a) $\underbrace{(y+\cos x)}_{P} \cdot dx + \underbrace{(x+2y)}_{Q} \cdot dy$

$P_y = Q_x = 1 \Rightarrow$ Differentialform ist ein vollständiges Differential, d.h. es exisitert f mit $f_x = P$ und $f_y = Q$.

Bestimmung von f: $f_x = y + \cos x \Rightarrow$ Integration nach x ergibt

$f = yx + \sin x + c(y)$, einsetzen in $f_y = x + 2y$:

$x + c'(y) = x + 2y$

$c'(y) = 2y \Rightarrow c(y) = y^2 + c_0 \Rightarrow f(x,y) = yx + \sin x + y^2 + c_0$

(b) $\underbrace{2xy}_{P} \cdot dx + \underbrace{y}_{Q} \cdot dy \qquad P_y = 2x \neq Q_x = 0$

$\Rightarrow$ *kein* vollständiges Differential

10.6 Kettenregel, Richtungsableitung, Gradient

Wir setzen stets voraus: $D_f \subset \mathbb{R}^n$ ist offen, f_{x_i} existiert und ist stetig $(i = 1, \ldots, n)$.

10.6.1 Satz: Kettenregel

(i) $v_1, \ldots, v_n$ seien auf dem Intervall (a,b) definierte und differenzierbare Funktionen und für alle $t \in (a,b)$ sei $(v_1(t), \ldots, v_n(t)) \in D_f$. Dann ist die Funktion $g(t) = f(v_1(t), \ldots, v_n(t))$ auf (a,b) differenzierbar mit

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(v_1(t), \ldots, v_n(t)) \qquad t \in (a,b)$$

(ii) $v_1, \ldots, v_n$ seien auf der offenen Menge $M \subset \mathbb{R}^k$ definierte und partiell stetig differenzierbare Funktionen und für alle $(t_1, \ldots, t_k) = P \in M$ sei $(v_1(P), \ldots, v_n(P)) \in D_f$. Dann ist die Funktion

$$h(P) = f(v_1(P), \ldots, v_n(P))$$

nach t_j $(j = 1, \ldots, k)$ auf M differenzierbar und es gilt:

$$\frac{\partial h}{\partial t_j}(P) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(v_1(P), \ldots, v_n(P)) \cdot \frac{\partial v_i}{\partial t_j} \qquad P \in M$$

Merkregel

(i) $\dfrac{df}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \dfrac{dx_i}{dt}$

(ii) $\dfrac{\partial f}{\partial t_j} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \dfrac{\partial x_i}{\partial t_j} \qquad (t = 1, \dots, k)$

10.6.2 Beispiele

(a) $f(x, y)$ beliebig (z.B. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$)
$v_1(t) = t^2,\ v_2(t) = t^3 \quad \Rightarrow g(t) = f(t^2, t^3)$
$g'(t) = f_x(t^2, t^3) \cdot 2t + f_y(t^2 + t^3) \cdot 3t^2$

(b) $f(x, y)$ beliebig, $v_1(t_1, t_2) = t_1 + t_2$, $v_2(t_1, t_2) = t_1 \cdot t_2$
$h(t_1, t_2) = f(t_1 + t_2, t_1 \cdot t_2)$
$\dfrac{\partial h}{\partial t_1} = f_x(t_1 + t_2, t_1 \cdot t_2) \cdot 1 + f_y(t_1 + t_2, t_1 \cdot t_2) \cdot t_2$
$\dfrac{\partial h}{\partial t_2} = f_x(t_1 + t_2, t_1 \cdot t_2) \cdot 1 + f_y(t_1 + t_2, t_1 \cdot t_2) \cdot t_1$

10.6.3 Richtungsableitung

$f(x_1, \dots, x_n), \quad P_0(x_1, \dots, x_n) \in D_f, \quad \vec{a} = (a_1, \dots, a_n)^T, \quad |\vec{a}| = 1$
Parameterdarstellung der Geraden mit der Richtung $\vec{a}$, die durch P_0 geht:

$$P_0 + t \cdot \vec{a} = (x_1 + t \cdot a_1, \dots x_n + t \cdot a_n) \qquad t \in \mathbb{R}$$

Wir betrachten f nur auf dieser Geraden:

$$g(t) \overset{\text{Def.}}{=} f(x_1 + t \cdot a_1, \dots, x_n + t \cdot a_n) \qquad t \in \mathbb{R}$$

Definition: Unter der *Richtungsableitung* von f im Punkt P_0 in Richtung $\vec{a}$ mit $|\vec{a}| = 1$ versteht man die Zahl $g'(0)$ (für $t = 0$ erhalten wir dem Punkt P_0)

Schreibweise: $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{a}}(P_0)$ Nach der Kettenregel

$$g'(t) = f_{x_1}(x_1+ta_1, \dots, x_n+ta_n) \cdot a_1 + \dots + f_{x_n}(x_1+ta_1, \dots, x_n+ta_n) \cdot a_n$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(P_0) = f_{x_1}(P_0) \cdot a_1 + \dots + f_{x_n}(P_0) \cdot a_n$$

Ist ein beliebiger Richtungsvektor $|\vec{a}| \neq 0$ gegeben, so ersetzen wir $\vec{a}$ durch $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ (= normierter Vektor).

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(P) = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot (f_{x_1}(P) \cdot a_1 + \dots + f_{x_n}(P) \cdot a_n)}$$

10.6.4 Beispiele

(a) $\vec{a} = (1, 0, 0, \ldots)^T \qquad |a| = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = f_{x_1}(P)$$

(b) $f(x, y) = x \cdot y + x^2 \qquad P_0 = (1, 2)$

$$\begin{array}{lll} f_x = y + 2x & \Rightarrow & f_x(P_0) = f_x(1,2) = 4 \\ f_y = x & \Rightarrow & f_y(P_0) = f_y(1,2) = 1 \end{array}$$

$$\vec{a} = (1,1)^T \quad |\vec{a}| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \tfrac{\partial f}{\partial \vec{a}}(P_0) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(4 \cdot 1 + 1 \cdot 1) \approx 3{,}535$$

$$\vec{a} = (5,1)^T \quad |\vec{a}| = \sqrt{26} \quad \Rightarrow \quad \tfrac{\partial f}{\partial \vec{a}}(P_0) = \tfrac{1}{\sqrt{26}}(4 \cdot 5 + 1 \cdot 1) \approx 4{,}118$$

10.6.5 Definition: Gradient

Der Vektor $(f_{x_1}(P), \ldots, f_{x_n}(P))^T$ heißt *Gradient* von f im Punkt P.

Bezeichnung: $\mathrm{grad} f(P)$

Bemerkung: $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{a}}(P) = \dfrac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} \cdot \mathrm{grad} f(P)$

10.6.6 Satz

(i) Der Vektor $\mathrm{grad} f(P)$ zeigt in die Richtung des stärksten Anstiegs von f im Punkt P. $-\mathrm{grad} f(P)$ zeigt in die Richtung des stärksten Gefälles.

(ii) $|\mathrm{grad} f(P)|$ gibt den größten Anstieg im Punkt P an.

10.6.7 Beispiel

In jedem Körper, in dem kein Temperaturgleichgewicht herrscht, treten Wärmeströmungen auf. Der Wärmefluß im Punkt P wird durch einen Vektor $\vec{q}(P)$, dessen Richtung die der Wärmeströmung, und dessen Länge die Intensität ist dargestellt. Es sei $T(P)$ die Temperatur im Punkt P.
Es zeigt sich, daß

(i) Der Wärmefluß hat die Richtung des stärksten Gefälles der Temperatur in P und

(ii) die Stärke des Wärmeflusses ist proportional zum Temperaturgefälle. Der Vektor $-\mathrm{grad} T(P)$ hat diese Eigenschaften $\Rightarrow$ *Grundgesetz der Wärmeleitung.*

$$\vec{q}(P) = -\lambda(P) \cdot \mathrm{grad} T(P)$$

wobei $\lambda(P)$ die Wärmeleitfähigkeit ist.

10.7 Die Taylorsche Formel

Zur Erinnerung: Taylorsche Formel ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$):

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot h^k + \underbrace{R_n(x_0)}_{\text{Restglied}}$$

Mit ∇ (*Nabla-Operator*) bezeichnen wir den formalen Ausdruck

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T$$

Ist $f(x_1, \ldots, x_n)$ eine Funktion (für die alle partiellen Ableitungen existieren), so sei

$$\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right)^T$$

(formale Multiplikation des „Vektors“ ∇ mit dem Skalar f). Bemerkung: $\operatorname{grad} f = \nabla f$. Mit ∇ rechnet man ähnlich mit einem Vektor, einige Formeln lassen sich mit diesem Operator übersichtlicher darstellen. Sei z.B. $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$(h \cdot \nabla) f(P) = \left(h_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \cdot f(P) = h_1 \cdot f_{x_1}(P) + \cdots + h_n \cdot f_{x_n}(P)$$

(das Differential von f im Punkt P zum Zuwachs h).

Weitere Beispiele:

$$(h \cdot \nabla)^2 \cdot f(P) = \left(h_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \cdot \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^2 \cdot f(P) = \sum_{i,j=1}^{n} h_i \cdot h_j \cdot f_{x_i x_j}(P)$$

mit $\left[h_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot h_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} = h_i \cdot h_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \cdot \partial x_j} = f_{x_i x_j} \cdot h_i \cdot h_j \right]$

Oder: $\nabla \cdot \nabla\ f = \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}$

$\nabla \cdot \nabla$ wird auch mit Δ bezeichnet und heißt *Laplace-Operator*.

10.7.1 Satz: Mehrdimensionale Taylorsche Formel

Die Funktion f sei auf der offenen Menge $D_f \in \mathbb{R}^n$ $(n+1)$–mal stetig partiell differenzierbar nach allen Variablen.

Es sei $h \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in D_f$ und $x = x_0 + h \in D_f$. Dann existiert ein $t \in (0, 1)$ so, daß

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (h \cdot \nabla)^k f(x_0) + \frac{1}{(n+1)!} \cdot (h \cdot \nabla)^{n+1} f(x_0 + t \cdot h)$$

10.7.2 Beispiel

$f(x,y) = e^x \cdot \sin y$

Taylorentwicklung an der Stelle $P = (0,0)$ bis zu Gliedern dritter Ordnung.

$k = 0$:

$$f(P) = f(0,0) = 0$$

$k = 1$:

$$f_x = e^x \cdot \sin y \qquad f_x(P) = 0$$
$$f_y = e^x \cdot \cos y \qquad f_y(P) = 1$$

$k = 2$:

$$f_{xx} = e^x \cdot \sin y \qquad f_{xx}(P) = 0$$
$$f_{xy} = e^x \cdot \cos y \qquad f_{xy}(P) = f_{yx}(P) = 1 \qquad (2\ \times)$$
$$f_{yy} = e^x \cdot \sin y \qquad f_{yy}(P) = 0$$

$k = 3$:

$$f_{xxx} = e^x \cdot \sin y \qquad f_{xxx}(P) = 0$$
$$f_{xxy} = e^x \cdot \cos y \qquad f_{xxy}(P) = f_{xyx}(P) = f_{yxx}(P) = 1 \qquad (3\ \times)$$
$$f_{xyy} = e^x \cdot \sin y \qquad f_{xyy}(P) = f_{yxy}(P) = f_{yyx}(P) = 0 \qquad (3\ \times)$$
$$f_{yyy} = e^x \cdot \cos y \qquad f_{yyy}(P) = -1$$

Mit $x_0 = y_0 = 0$, $h_1 = x - x_0 = x$, $h_2 = y - y_0 = y$ gilt:

$$f(x,y) = \underbrace{0}_{k=0} + \underbrace{\frac{1}{1!} \cdot 0 \cdot x + \frac{1}{1!} \cdot 1 \cdot y}_{k=1} + \frac{1}{2!}\Big(\underbrace{0 \cdot x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x \cdot y + 0 \cdot y^2}_{k=2}\Big) +$$
$$+ \tfrac{1}{3!} \cdot \Big(\underbrace{0 \cdot x^3 + 3 \cdot 1 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot 0 \cdot x \cdot y^2 + (-1) \cdot y^3}_{k=3}\Big) + R_3$$

$f(x,y) = y + xy + \frac{1}{6} \cdot (3x^2 y - y^3) + R_3$

Bemerkung: In diesem Spezialfall hätten wir auch die Taylorentwicklung der Funktionen e^x und $\sin y$ multiplizieren können.

10.8 Implizite Funktionen

Wir betrachten die Auflösbarkeit einer Gleichung $F(x, y) = 0$ nach einer Variablen.

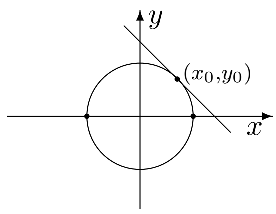
10.8.1 Beispiele

(a) $F(x, y) = ax + by + c = 0$

Auflösung nach y genau dann möglich, wenn $b \neq 0$.

$y = f(x) = -\frac{a}{b} \cdot x - \frac{c}{b}$ Bemerkung: $b = F_y$

(b) $F(x, y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$



Nur eine sogenannte *lokale Auflösbarkeit* in einer Umgebung einer Stelle $(x_y.y_0)$.

Wenn $y_0 > 0$, dann $y = f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$
Wenn $y_0 < 0$, dann $y = f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$

In den Punkten $(\pm 1, 0)$ ist eine lokale Auflösung nicht möglich! In diesen Punkten ist die Tangente parallel zur x–Achse.

Die y–Koordinate des Gradienten $(F_x, F_y) = (2x, 2y)$ verschwindet in diesen Punkten.

10.8.2 Satz

Sei $F(x, y)$ stetig nach x und y differenzierbar, $F(x_0, y_0) = 0$ und $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Dann existiert eine Umgebung U von x_0, für die gilt: Es gibt genau eine Funktion $y = f(x)$ auf U mit

$$F(x, f(x)) = 0 \qquad x \in U$$

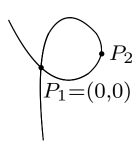
Die Funktion f ist dann differenzierbar und $f'(x) = -\dfrac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(y))}$

Beweis der letzten Gleichung: $h(x) = F(x, h(x)) = 0 \Rightarrow h'(x) = 0$

$$\frac{dh}{dx} = F_x \cdot 1 + F_y \cdot f'(x) = 0 \qquad \text{(Kettenregel)}$$

10.8.3 Beispiel

$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$, $(a \neq 0)$, „Kartesisches Blatt“



Wir bestimmen diejenigen Kurvenpunkte, für die $F_y = 0$ wird:

(1) $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$

(2) $F_y(x,y) = 3y^2 - 3ax = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y^2}{a}$ in (1)

$$\Rightarrow \frac{y^6}{a^3} + y^3 - 3y^3 = 0$$

$y^6 = 2a^3y^3 \qquad / : y^3$ (für $y \neq 0$) $\qquad \Rightarrow \qquad y^3 = 2a^3 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt[3]{2}a$

$\Rightarrow P_1 = (0,0),\ P_2 = a \cdot (4^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{3}})$

Verallgemeinerung

Auflösbarkeit aus Gleichungssystemen:

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_m) = 0 \\ &\quad\vdots \\ &F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_m) = 0 \end{aligned}$$

nach den Variablen $y_1, \ldots, y_m$ auflösen, d.h.

$$\begin{aligned} &y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ &\quad\vdots \\ &y_m = f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Kapitel 11

Integralrechnung der Funktionen mehrerer Variablen

11.1 Mehrfache Integrale

11.1.1 Doppelintegrale

Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte abgeschlossene Menge und f eine auf G definierte beschränkte Funktion. Es sei $f(P) \geq 0$ $(P \in G)$. Wir wollen das Volumen desjenigen Körpers bestimmen, der durch die Menge

$$\big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in G,\ 0 \leq z \leq f(x, y)\big\}$$

definiert ist.

1. Z sei eine Zerlegung von G in n Teilmengen $g_1, \ldots, g_n$ für die folgendes gilt:
   (a) Jede Teilmenge g_i hat einen Flächeninhalt Δg_i
   (b) Die Vereinigung aller g_i ist G
   (c) Die g_i sind disjunkt
   (d) Sei $\delta_i = \sup\{|P - Q| : P, Q \in g_i\}$ (*Durchmesser* von g_i) und $\Delta(Z) = \max\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ (*Feinheit* der Zerlegung)
2. (a) In jeder Menge g_i wird ein „Zwischenpunkt“ $P_i \in g_i$ gewählt und das Produkt $f(P_i) \cdot \Delta g_i$ gebildet (Volumen der „Säulen“)
   (b) Es wird die Zwischensumme
   $$S(Z) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta g_i$$
   gebildet (Näherung für das gesuchte Volumen).

11.1.2 Definition

Die Funktion f heißt über G *integrierbar*, wenn es eine Zahl I gibt, so daß

$$\lim_{\Delta(Z)\to 0} S(Z) = I$$

Die Zahl I nennt man das *Integral von f über G*. G heißt *Integrationsbereich.*

Schreibweise: $\int\limits_G f\,dP$ *oder* $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$

Bemerkung: $\int\limits_G 1\,dP =$ Flächeninhalt von G

11.1.3 Satz

(i) Die Aussagen in (5.8.5) bleiben auch für Doppelintegrale gültig, wenn man $[a,b]$ durch G und $b-a$ durch den Flächeninhalt von G ersetzt.

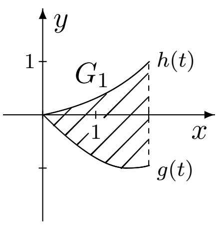
(ii) Jede stetige Funktion auf G ist integrierbar

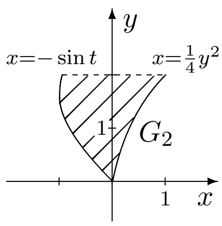
11.1.4 Definition (Normalbereich)

g und h seien auf $[a,b]$ definierte und stetige Funktionen, für die gilt $g(t) \leq h(t)$ $(t \in [a,b])$. Dann heißt jede der Mengen $G_1 = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq h(x)\}$ und $G_2 = \{(x,y) : a \leq y \leq b,\ g(x) \leq x \leq h(x)\}$ ein *Normalbereich* in der Ebene.

Beispiele

(a) $h(t) = \frac{1}{4}t^2$ $\quad g(t) = -\sin t$ $\quad [a,b] = [0,2]$





(b) Der Kreis K mit dem Mittelpunkt $(0,0)$ und dem Radius 2 ist ein Normalbereich, da

$$K = \{(x,y) : -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$$

oder

$$K = \{(x,y) : -2 \leq y \leq 2, -\sqrt{4-x^2} \leq x \leq \sqrt{4-x^2}\}$$

$[a,b] = [-2,2]$. Kreisgleichung $x^2+y^2 = 4 \Rightarrow y = \sqrt{4-x^2}$ (für $y \geq 0$) bzw. $y = -\sqrt{4-x^2}$ (für $y \leq 0$).

11.1.5 Satz

Mit den Bezeichnungen von (11.1.4) gilt:

$$\int_{G_1} f\,dP = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right] dx \qquad \int_{G_2} f\,dP = \int_a^b \left[\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx \right] dy$$

11.1.6 Beispiel

a) $G = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ -x \le y \le x^2\} \qquad f(x,y) = x$

$\int\limits_G f\,dP = \int\limits_0^1 \int\limits_x^{x^2} x\,dy\,dx = \int\limits_0^1 x \cdot y\Big|_{y=x}^{y=x^2} dx = \int\limits_0^1 x^3 + x^2\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{7}{12}$

b) Ist der Integrationsbereich G ein Rechteck, also alle vier Integrationsgrenzen konstant, so kommt es auf die Reihenfolge der Integration nicht an. Zum Beispiel:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{x^2} \cdot \sin y\ dx\,dy = \int_0^1 \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{x^2} \cdot \sin y\ dy}_{=-e^{x^2}\cos y\big|_{y=0}^{2\pi}=0} dx = 0$$

11.1.7 Satz

Die Funktion f sei auf der abgeschlossenen Menge $G \subset \mathbb{R}^2$ stetig, g und h seien auf $[a,b]$ definierte stetige Funktionen, für alle $t \in [a,b]$ sei $0 \le g(t) \le h(t) \le 2\pi$. Ferner bezeichnen r und φ Polarkoordinaten.

(i) Wenn G durch die Ungleichung $0 \le a \le r \le b$ und $g(r) \le \varphi \le h(r)$ beschrieben wird, so gilt

$$\int_G f(x,y)\ dx\,dy = \int_a^b \int_{g(r)}^{h(r)} f(r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi)\cdot r\,d\varphi\,dr$$

(ii) Wenn G durch die Ungleichung $0 \le a \le \varphi \le b$ und $0 \le g(\varphi) \le r \le h(\varphi)$ beschrieben wird, so gilt

$$\int_G f(x,y)\ dx\,dy = \int_a^b \int_{g(\varphi)}^{h(\varphi)} f(r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi)\cdot r\,dr\,d\varphi$$

$r\,dr\,d\varphi$: *Flächenelement* in Polarkoordinaten

11.1.8 Beispiele

$G: 1 \leq r \leq 2 \quad (r-1)\cdot\pi \leq \varphi \leq r\cdot\pi$
Flächeninhalt F von G:

$$
\begin{aligned}
F &= \int_G 1\,dP = \int_1^2 \int_{(r-1)\pi}^{r\pi} 1\ r\ r\varphi\ dr = \int_1^2 r\cdot\varphi\Big|_{\varphi=(r-1)\pi}^{\varphi=r\cdot\pi} dr \\
&= \pi\int_1^2 r\ dr = \pi\frac{r^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{3}{2}\,\pi
\end{aligned}
$$

11.1.9 Dreifache Integrale

$G \subset \mathbb{R}^3$ sei eine beschränkte, abgeschlossene Menge und f eine auf G definierte beschränkte Funktion. Wir zerlegen G in Teilmengen $g_1, \ldots, g_n$ die die selben Eigenschaften wie in (11.1.1) haben (dabei ist „Flächeninhalt“ durch „Rauminhalt“ zu ersetzen).

Die Definition (11.1.2) wird nun wörtlich übernommen ($\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$).

Bemerkung: $\displaystyle\int_G 1\ dP =$ Volumen von G.

Definition: Es seien f_1 und f_2 in $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und g_1 und g_2 in $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a,b], f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$ stetige Funktionen. Dann heißt die Menge

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b,\ f_1(x) \leq y \leq f_2(x),\ g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y)\}$$

ein *Normalbereich* in $\mathbb{R}^3$. Vertauscht man x, y, z untereinander, so entstehen weitere Mengen, die man auch Normalbereiche nennt ($3! = 6$ Möglichkeiten).

11.1.10 Satz

Die Funktion f sei auf dem Normalenbereich K aus (11.1.9) stetig. Dann ist f über K integrierbar und es gilt:

$$\int_K f(P)\,dP = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\ dz\,dy\,dx$$

Sind alle Integrationsgrenzen konstant, so kommt es auf die Reihenfolge der Integrationen nicht an.

11.1.11 Beispiel

$K = \{(x,y,z) : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq z \leq x+y+1\}$
$f(x,y,z) = 2xz + y^2$

$$\int\limits_G f(P)\,dP = \int\limits_0^2 \int\limits_0^x \int\limits_0^{x+y+1} 2xz + y^2\ dz\,dy\,dx =$$

$$\int\limits_0^2 \int\limits_0^x 2x \cdot \frac{z^2}{2} + y^2 z \Big|_{z=0}^{z=x+y+1} dy\,dx = \int\limits_0^2 \int\limits_0^x x(x+y+1)^2 + y^2(x+y+1)\ dy\,dx =$$

$$\int\limits_0^2 \int\limits_0^x x^3 + 2x^2y + 2x^2 + xy^2 + 2xy + x + y^2x + y^3 + y^2\ dy\,dx =$$

$$\int\limits_0^2 x^4 + \frac{x^4}{3} + x^2 + x^4 + 2x^3 + x^3 + \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\ dx \overset{[...]}{=} \frac{104}{4}$$

11.1.12 Substitution der Variablen

$$\int\limits_K f(P)\ dP = \iiint\limits_K f(x,y,z)\ dx\,dy\,dz$$

Zylinderkoordinaten: $(r,\ \varphi,\ z)$

Substitution:

1. $x \longrightarrow r \cdot \cos\varphi, \quad y \longrightarrow r \cdot \sin\varphi,\ z$ unverändert
2. $dP \longrightarrow r \cdot dr\,d\varphi\,dz$

Kugelkoordinaten: $(r,\ \varphi\ \eta)$

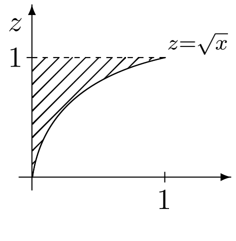
Substitution:

1. $x \longrightarrow r \cdot \cos\varphi \cdot \sin\eta, \quad y \longrightarrow r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\eta, \quad z = r \cdot \cos\eta$
2. $dP \longrightarrow r^2 \cdot \sin\eta\,d\varphi\,d\eta\,dr$
3. Neue Grenzen einsetzen

Beispiel

Das schraffierte Flächenstück rotiere man um die z–Achse, der entstehende Körper sei K.

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 = r^2 \int\limits_K f(P)\ dP = ?$$



K in Zylinderkoordinaten: $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $\sqrt{x} \leq z \leq 1$

$$\int_K f(P)\, dP = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{r}}^1 \underbrace{r^2}_{f} \underbrace{r\, dz\, d\varphi\, dr}_{\text{Flächenelement}} = \frac{1}{18}\pi$$

Man kann auch K beschreiben als: $0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq 1,\ 0 \leq r \leq z^2$

Beispiel

Es sei K die obere Hälfte der Kugel vom Radius R mit dem Mittelpunkt $(0,0,0)$.

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - xz \qquad \int_K f(P)\, dP = ?$$

Beschreibung von K in Kugelkoordinaten $(r,\ \varphi,\ \eta)$:

$$K: \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \eta \leq \frac{1}{2}\pi, \quad 0 \leq r \leq R$$

$$(x = r \cdot \cos\varphi \cdot \sin\eta,\ y = r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\eta,\ z = r \cdot \cos\eta)$$

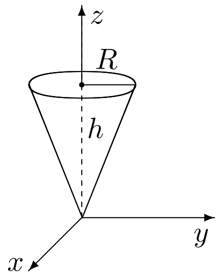
$$\begin{aligned}
\int_K f(P)\, dP &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (\underbrace{r^2 \cdot \sin^2\eta}_{x^2+y^2} - r^2 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\eta \cdot \cos\eta)\ r^2 \sin\eta\, dr\, d\eta\, d\varphi \\
&= \frac{R^5}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin^3\eta - \underbrace{\cos\varphi \cdot \sin^2\eta \cdot \cos\eta}_{0}\ d\varphi\, d\eta \\
&= \frac{R^5}{5} \cdot 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\eta\, d\eta \overset{[...]}{=} \frac{4}{15} \cdot \pi \cdot R^5
\end{aligned}$$

11.2 Anwendungen dreifacher Integrale

11.2.1 Satz

Ein Körper $K (\in \mathbb{R}^3)$ mit der Massendichte ϱ hat das Volumen $V = \int_K 1\, dP$, die Masse $M = \int_K \varrho(P)\, dP$, den Schwerpunkt (x_s, y_s, z_s) mit $x_s = \frac{1}{M} \cdot \int_K x \cdot \varrho(P)\, dP$, $y_s = \frac{1}{M} \cdot \int_K y \cdot \varrho(P)\, dP$, $z_s = \frac{1}{M} \cdot \int_K z \cdot \varrho(P)\, dP$, das Trägheitselement bezüglich der z–Achse als Drehachse $\Theta = \int_K (x^2 + y^2) \cdot \varrho(P)\, dP$. Für eine beliebige Drehachse gilt: $\Theta = \int_K a^2(P) \cdot \varrho(P)\, dP$, wobei $a(P)$ den Abstand von P von der Drehachse bezeichnet. Analoge Formeln gelten in $\mathbb{R}^2$ (mit Doppelintegralen).

11.2.2 Beispiel



Es ist der Schwerpunkt des Kegels zu berechnen, $\varrho = 1$. Beschreibung von K in Zylinderkoordinaten (siehe 10.1.3.e):

$$K : 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \frac{h}{R} r \leq z \leq h$$

Aus Symmetriegründen: $x_s = y_s = 0$.

$$\begin{aligned} z_s &= \frac{1}{M} \int\limits_K z \, dP = \frac{1}{M} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^R \int\limits_{\frac{hr}{R}}^h z \cdot r \, dz \, dr \, d\varphi = \\ &\overset{[...]}{=} \frac{\pi}{M} \int\limits_0^R \left(h^2 - \frac{h^2}{R^2} r^2 \right) r \, dr = \frac{\pi}{4} \cdot h^2 \cdot R^2 \cdot \frac{1}{M} \end{aligned}$$

Wobei $M = \frac{\pi}{3} \cdot R^3 \cdot h$ (Masse = Volumen, da $\varrho = 1$):

$$\Rightarrow z_s = \frac{3}{4} \cdot h$$

Kapitel 12

Vektoranalysis

12.1 Skalar– und Vektorfelder

12.1.1 Definition

Es sei $D \subset \mathbb{R}^3$. Eine Abbildung $\vec{V}$, die jedem Punkt $P = (x, y, z) \in D$ einem dreidimensionalen Vektor $\vec{V}(P) = \vec{V}(x, y, z) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$ zuordnet, heißt ein (räumliches) *Vektorfeld* auf D. Eine Abbildung F, die jeden Punkt $P \in D$ eine reelle Zahl $F(P)$ zuordnet, heißt ein (räumliches) *Skalarfeld* auf D. Ist $D \subset \mathbb{R}^2$ und sind die Vektoren $\vec{V}(P)$ zweidimensional $\vec{V}(P) = \vec{V}(x, y) = (v_1(x, y), v_2(x, y))$, so spricht man von einem *ebenen Vektorfeld* bzw. *ebenen Skalarfeld.*

12.1.2 Beispiele

Skalare Felder

- Temperaturverteilung in einem Raum
- elektrostatisches Potential in der Umgebung einer geladenen Kugel
- Dichteverteilung im innern der Erdkugel
- Betrag eines Vektorfeldes

Vektorfelder

- Gravitationfeld der Erde
- elektrostatisches Feld in einem Kondensator
- Geschwindigkeit einer Strömung
- Gradient eines Skalarfeldes $\vec{C} = \operatorname{grad} F = (F_x, F_y, F_z)^T$

Weitere Beispiele in SigMath, http://www.math.tu-dresden.de/~sasvari/

12.1.3 Definition: Rotation

Es sei $\vec{V} = (v_1, v_2, v_3)^T$ ein auf der offenen Menge D definiertes und dort partiell differenzierbares Vektorfeld. Dann heißt das Vektorfeld

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^T$$

die *Rotation* (oder *Rotor*) von $\vec{V}$. Gilt $\operatorname{rot} \vec{V} = (0,0,0)^T$ in D, so heißt $\vec{V}$ ein wirbelfreies Vektorfeld.
Die Rotation läßt sich formal durch das Vektorprodukt darstellen:

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \nabla \times \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T \times (v_1, v_2, v_3)^T = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

(Entwicklung nach der ersten Zeile)

Rechenregeln

$$\begin{array}{lcl} \operatorname{rot}(\vec{V} + \vec{W}) & = & \operatorname{rot} \vec{V} + \operatorname{rot} \vec{W} \\ \operatorname{rot}(c \cdot \vec{V}) & = & c \cdot \operatorname{rot} \vec{V} \\ \operatorname{rot}(F \cdot \vec{V}) & = & (\operatorname{grad} F) \times \vec{V} + F \cdot \operatorname{rot} \vec{V} \end{array}$$

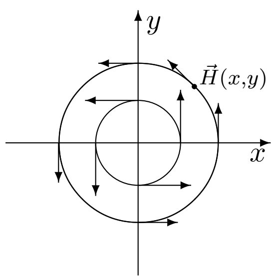
12.1.4 Beispiele

(a) Bezeichne $\vec{H}$ das mangnetische Feld eines geraden, unendlich langen, von einem gleichstromdurchflossenen Leiters. Wir legen das Koordinatensystem so, daß die z–Achse mit dem Leiter zusammenfällt und ihre Richtung gleich der Stromrichtung ist.

$$\vec{H}(x,y,z) = \frac{k}{x^2+y^2} \cdot (x,y,0)^T$$

$$|\vec{H}| = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \vec{H} \perp (x,y,z)^T$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = k \cdot \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial v_2}{\partial y}$$



$\operatorname{rot} \vec{H} = (0,0,0)^T \Rightarrow$ Vektorfeld wirbelfrei

(b) $\vec{V}(x,y,z) = (x^2 + xyz,\ y^2 - x^2,\ x + y \cdot \sin z)^T$

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2+xyz & y^2-x^2 & x+y\sin z \end{vmatrix} = (\sin z - 0,\ -1 + xy,\ -2x - xz)^T$$

$\Rightarrow$ Vektorfeld $\vec{V}$ ist nicht wirbelfrei.

12.1.5 Definition: Divergenz

Es sei $\vec{V} = (v_1,\, v_2,\, v_3)^T$ ein auf der offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^3$ definiertes und dort partiell differenzierbares Vektorfeld. Dann heißt das Skalarfeld

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

die *Divergenz* (*Quelldichte*, *Ergiebigkeit*) von $\vec{V}$. Man nennt diejenigen Punkte, für die $\operatorname{div} \vec{V}(P) > 0$ bzw. $\operatorname{div} \vec{V}(P) < 0$ gilt die *Quellen* bzw. *Senken* des Feldes $\vec{V}$. Ist $\operatorname{div} \vec{V} = 0$ in D, so heißt $\vec{V}$ ein *quellenfreies Feld.*
Die Divergenz läßt sich formal als Skalarprodukt darstellen:

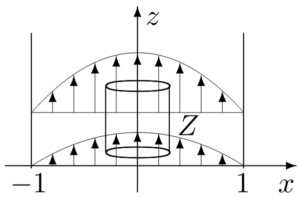
$$\operatorname{div} \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^T \cdot (v_1,\, v_2,\, v_3)^T$$

Analog für ebene Vektorfelder ($z = 0$).

Physikalische Deutung: Es sei durch $\vec{V}(x, y, z) = (0,\, 0,\, z\cdot(1-x^2-y^2))^T$ ein Vektorfeld auf dem Zylinder $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ definiert.
$\vec{V}$: Geschwindigkeit einer das Rohr (Zylindermantel) durchströmenden Flüssigkeit.

Wir denken uns einen Zylinder Z in die Strömung gelegt. „Volumengewinn“ in Z pro Zeiteinheit = abgeflossene − zugeflossene Menge:

$$\int_Z \operatorname{div} \vec{V}(P)\, dP = \iiint_Z 1 - x^2 - y^2 \; dx\, dy\, dz$$



$\operatorname{div} \vec{V}(P)$ wird auch als *Quellenstärke pro Volumen* bezeichnet.

Rechenregeln

$$\begin{array}{lcl}
\operatorname{div} (\vec{V} + \vec{W}) & = & \operatorname{div} \vec{V} + \operatorname{div} \vec{W} \\
\operatorname{div} (c \cdot \vec{V}) & = & c \cdot \operatorname{div} \vec{V} \\
\operatorname{div} (F \cdot \vec{V}) & = & (\operatorname{grad} F) \cdot \vec{V} + F \cdot \operatorname{div} \vec{V}
\end{array}$$

wobei F ein Skalarfeld ist.

Beispiele: $\vec{r} = (x, y)^T = 1 + 1 = 2$, $\quad \vec{r} = (x, y, z)^T = 1 + 1 + 1 = 3$

$$\vec{H}(x, y, z) = \frac{k}{x^2 + y^2} \cdot (-y, x, 0)^T \qquad \text{(magnetisches Feld, s. 12.1.4)}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = k \cdot \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial y} = -k \cdot \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0$$

$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{H} = 0 \Rightarrow$ Feld ist quellenfrei

12.1.6 Satz

Ein Vektorfeld $\vec{V}$ ist genau dann quellenfrei, wenn es sich als Rotation eines Vektorfeldes $\vec{W}$ darstellen läßt:

$$\operatorname{div}\vec{V} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V} = \operatorname{rot}\vec{W}$$

$\vec{W}$ heißt *Vektorpotenzial* (und ist bis auf den Gradienten einer skalaren Funktion eindeutig bestimmt).

Ein Vektorfeld $\vec{V}$ ist genau dann wirbelfrei, wenn es sich als Gradient eines Skalarfeldes darstellen läßt:

$$\operatorname{rot}\vec{V} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V} = \operatorname{grad}\vec{F}$$

F heißt *Skalarpotenzial* (und ist bis auf einem Konstanten eindeutig bestimmt). /siehe Satz 10.5.6 mit $n = 3$/

12.2 Kurvenintegrale

12.2.1 Kurven im Raum (Wiederholung)

Parameterdarstellung: $\vec{r}(t) = (x(t),\, y(t),\, z(t)), \quad t \in [a,\, b]$
Sind x, y, z differenzierbar, so sei

$$\vec{r'}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = (x'(t),\, y'(t),\, z'(t))$$

$\vec{r'}(t_0)$ ist Tangentialvektor an die Kurve im Kurvenpunkt $\vec{r}(t_0)$. Parameterdarstellung der Tangente:

$$\vec{r}(t_0) + t \cdot \vec{r'}(t_0) \qquad t \in \mathbb{R}$$

Beispiele

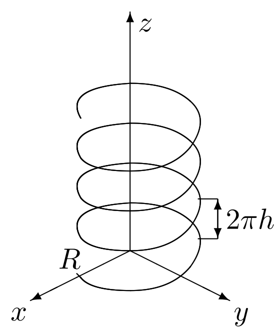
(a) Schraublinie: $\vec{r}(t) = (R \cdot \cos t,\, R \cdot \sin t,\, h \cdot t)^T, \quad t \in \mathbb{R}, (R > 0, h > 0)$

Abstand von der z–Achse:
$\sqrt{R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t} = R.$

Ein Umlauf: $2\pi \Rightarrow$ Ganghöhe: $2\pi \cdot h$.

Tangentialvektor: $\vec{r'} = (-R \cdot \sin t,\, R \cdot \cos t,\, h)^T$

Bei $t = 0$: $\vec{r}(0) = (R,\, 0,\, 0)^T$
$\vec{r'}(0) = (0,\, R,\, h)^T$
$\Rightarrow$ Tangente: $(R,\, 0,\, 0)^T + t \cdot (0,\, R,\, h)^T$

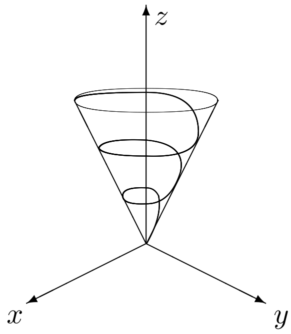


(b) Schraublinie auf einem Kegelmantel: $\vec{r}(t) = (t\cdot\cos t,\ t\cdot\sin t,\ h\cdot t)^T,\ t \in \mathbb{R}$

Abstand von der z–Achse: $|t|$

Ein Umlauf: $2\pi \Rightarrow$ Ganghöhe: $2\pi \cdot h$.

Tangentialvektor: $\vec{r'} = (t \cdot \cos,\ t \cdot \sin t,\ h \cdot t)^T$

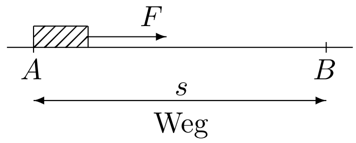


(c) Gerade: $\vec{r}(t) = \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{b}$, $t \in \mathbb{R}$, $(a, b \in \mathbb{R}^3)^T$ $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{b}$ Tangentialvektor der Geraden

12.2.2 Kurvenintegrale (Linienintegral)

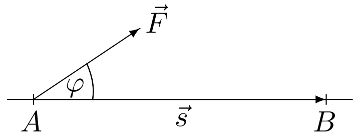
Motivation: Berechnung der Arbeit, die von einem Kraftfeld $\vec{F}$ beim Verschieben eines Massenpunktes verrichtet wird (entlang einer Kurve).

Arbeit	=	Kraft mal Weg
W	=	$F \cdot s$



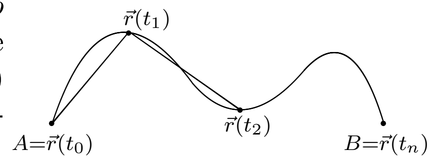
Spezialfall: Verschiebung längs einer Geraden durch eine konstante Kraft

$$\begin{aligned} \text{Arbeit} = W &= F \cdot s = |\vec{F}| \cdot \cos\varphi \cdot s \\ &= \vec{F} \cdot \vec{s} \end{aligned}$$



Es sei nun $C : \vec{r}(t) = (x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t))^T$, $t = [a,\ b]$ eine Kurve und auf C sei ein Vektorfeld $\vec{F}$ definiert.

Sei $Z : a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ eine Zerlegung des Intervalls $[a,\ b]$. Die geradlinige Verbindung der Punkte $\vec{r}(t_i)$ ergibt einen eingeschriebenen Streckenzug.



In jedem Teilintervall $[t_{i-1},\ t_i]$ wählen wir eine beliebige Zwischenstelle η_i. Näherung für $\vec{F}$ auf der i–ten Teilstrecke: $\vec{F}(\vec{r}(\eta_i))$. Wir bilden die Summe (Näherung für die Arbeit):

$$S(Z) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\vec{r}(\eta_i)) \cdot (\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1}))$$

Definiton: Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta Z \to 0} S(Z)$, so nennt man ihn *Kurvenintegral von $\vec{F}$ längs C.*

Bezeichnung: $\displaystyle\int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

12.2.3 Satz

Ist $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)^T$ stetig und C eine stückweise stetig differenzierbare Kurve, so ist $\vec{F}$ längs C integrierbar und es gilt

$$\int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_a^b F_1(\vec{r}(t)) \cdot x_1'(t) + F_2(\vec{r}(t)) \cdot x_2' + F_3(\vec{r}(t)) \cdot x_3' \, dt$$

wobei $\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$.

Bemerkung

(a) Für ein Kurvenintegral längs einer *geschlossenen* Kurve (d.h. $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$) schreibt man auch

$$\oint_C \vec{F} \, d\vec{r} \qquad (\textit{Zirkulation} \text{ von } \vec{F} \text{ längs } C)$$

(b) Auch die folgende Schreibweise ist üblich:

$C : \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad \vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ (keine part. Abl.!)

$$\begin{aligned} \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int\limits_C F_x(x,y,z) \, dx + F_y(x,y,z) \, dy + F_z(x,y,z) \, dz \\ &= \int\limits_a^b F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y} + F_z \cdot \dot{z} \, dt \end{aligned}$$

(c) Wird der Integrationsweg in umgekehrter Richtung durchlaufen, so tritt beim Integral ein Vorzeichenwechsel ein.

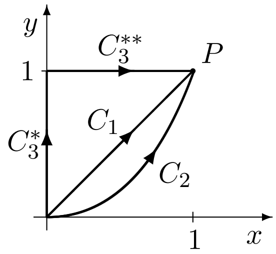
(d) Analog definiert man das Kurvenintegral für ein ebenes Vektorfeld $\vec{F} = (F_x, F_y)^T$ längs einer bestimmten Kurve $C : \vec{r}(t) = (x(t), y(t))^T$.

Es gilt:

$$\int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_C F_x(x,y) \, dx + F_y(x,y) \, dy = \int\limits_a^b F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y} \, dt$$

12.2.4 Beispiel

Vektorfeld: $F(x,y) = (xy^2,\, xy)^T$



$$\begin{aligned} I &= \int\limits_C (xy^2,\, xy)^T\, d\vec{r} = \int\limits_C xy^2\, dx + xy\, dy = \\ &= \int\limits_a^b x(t)\cdot y(t)^2 \cdot \dot{x}(t) + x(t)\cdot y(t)\cdot \dot{y}(t)\; dt \end{aligned}$$

Integrationsweg C_1: $x = t$, $\dot{x} = 1$, $y = t$, $\dot{y} = 1$ $(0 \le t \le 1)$

$$I = \int\limits_0^1 t^3 + t^2\, dt = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3\Big|_0^1 = \frac{7}{12}$$

Integrationsweg C_2: $x = t$, $\dot{x} = 1$, $y = t^3$, $\dot{y} = 3t^2$ $(0 \le t \le 1)$

$$I = \int\limits_0^1 t^7 + 3t^6\, dt = \frac{1}{8}t^8 + \frac{3}{7}t^7\Big|_0^1 = \frac{31}{36}$$

Integrationsweg $C_3 = C_3^* \wedge C_3^{**}$

Teilweg C_3^*: $x = 0$, $\dot{x} = 0$, $y = t$, $\dot{y} = 1$ $(0 \le t \le 1)$

$$I = \int\limits_0^1 0\, dt = 0$$

Teilweg C_3^{**}: $x = t$, $\dot{x} = 1$, $y = 1$, $\dot{y} = 0$ $(0 \le t \le 1)$

$$I = \int\limits_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}t^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

12.2.5 Satz

Es sei $\vec{F}$ ein stetig partiell differentierbares Vektorfeld in einem *einfach–zusammenhängendem* Bereich.
Dann sind die folgenden Eigenschaften gleichwertig:

(i) Das Kurvenintegral $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ ist längs einer Kurve C, die zwei beliebige Punkte P und Q verbindet, ist unabhängig vom eingeschlagenen Verbindungsweg (der im Bereich liegt).

(ii) Das Kurvenintegral längs einer im Bereich liegenden geschlossenen Kurve hat stets den Wert 0.

(iii) $\vec{F}$ ist als Gradient einer Skalaren Funktion φ (*Potential*) darstellbar: $\vec{F} = \operatorname{grad}\varphi$. Für φ gilt dann $\int\limits_C \vec{F} d\vec{r} = \varphi(Q) - \varphi(P)$.

(iv) $\vec{F}$ ist wirbelfrei; $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$.

$\vec{F}$ heißt *konservativ*, wenn eine dieser Bedingungen (dann auch alle) erfüllt ist.

Ein Bereich heißt *einfach–zusammenhängend*, wenn sich jede im Bereich liegende geschlossene Kurve auf einen Punkt zusammenziehen lässt.

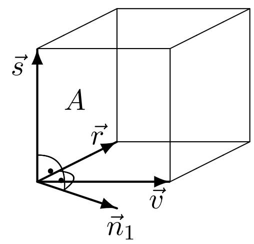
12.3 Oberflächenintegral

Wir betrachten eine Flüssigkeitsströmung mit der Geschwindigkeit $\vec{v}(P)$ (räumliches Vektorfeld). Wir interessieren uns für die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit durch ein bestimmtes Flächenstück A hindurchströmt.

Spezialfall: $\vec{v}$ ist konstant, A ist ein Rechteck

Wir nehmen an, daß $\vec{n}_1 = \vec{r} \times \vec{s}$ „zur selben Seite“ zeigt wie $\vec{r}$.

(Vereinbarung; *orientierte Fläche*).



Die gesuchte Flüssigkeit ist dann gleich dem Volumen des Spates, das durch $\vec{r}$, $\vec{s}$, und $\vec{v}$ aufgespannt wird:

$$V = \underbrace{[r,\, s,\, v]}_{\text{Spatprodukt}} = \vec{v} \cdot (\vec{r} \times \vec{s}) = \vec{v} \cdot \vec{n}_1 = \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot \text{Flächeninhalt } A$$

$$\boxed{\vec{n} = \frac{\vec{n}_1}{|\vec{n}_1|} = \frac{\vec{n}_1}{|\vec{r} \times \vec{s}|}} \qquad |\vec{r} \times \vec{s}| = \text{Flächeninhalt von } A$$

Der allgemeine Fall: A sei eine sogenannte *orientierte Fläche*. Eine Fläche hat 2 Seiten. Sie heißt *orientiert*, wenn eine Vereinbarung getroffen wurde, die Flächennormale $\vec{n}$, $|\vec{n}| = 1$ auf einer bestimmten Seite anzuheften. Bei einer geschlossenen Fläche, z.B. der Oberfläche einer Kugel, zeigt $\vec{n}$ vereinbarungsgemäß nach außen.

- Wir wählen eine Zerlegung Z von A in n Teilflächen $A_1, \ldots, A_n$.

  $\Delta(Z)$: der maximale Durchmesser (*Feinheit* der Zerlegung)

- Aus jeder Teilfläche A_k wählen wir einen Punkt P_k. Sei $\vec{n}(P_k)$ die Flächennormale im Punkt P_k (Länge 1).
- Wir bilden die Zwischensumme ($|A_k|$: Flächeneinhalt)

$$S(Z) = \sum_{k=1}^{n} \vec{v}(P_k) \cdot \vec{n}(P_k) \cdot |A_k|$$

12.3.1 Definition

Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta(Z)\to 0} S(Z)$, so wird er *Oberflächenintegral* des Vektorfeldes $\vec{v}$ über die orientierte Fläche A genannt und durch

$$\iint\limits_{(A)} \vec{v} \cdot \vec{n}\, dA$$

bezeichnet (*Flußintegral*, *Fluß des Vektorfeldes* $\vec{v}$ durch A).

Bemerkungen

(a) Das Oberflächenintegral über eine geschlossene Fläche wird mit $\oint\!\!\oint\limits_{(A)} \vec{v}\vec{n}\, dA$ bezeichnet (*Hüllenintegral*).

(b) Setzt man speziell $\vec{v} = \vec{n}$, dann ist das Integral $\iint\limits_{(A)} 1\, dA$ und ist gleich dem Flächeninhalt von A.

12.3.2 Berechnung eines Oberflächenintegrals

Sei $\vec{F}$ ein Vektorfeld, die Fläche A sei in Parameterdarstellung durch $\vec{r}(u, v)$, ($a \le u \le b$, $c \le v \le d$) gegeben. Dann ist $\vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)$ ein Normalenvektor für die Fläche (für die Tangetialebene) im Punkt (u_0, v_0). Für die Flächennormale $\vec{n}(u, v)$ wählen wir den Vektor $\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$.

Existiert das Integral $\iint\limits_{(A)} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA$, so gilt

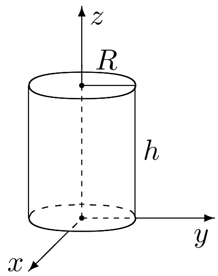
$$\iint\limits_{(A)} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA = \int_a^b \int_c^d \vec{F}(u, v) \cdot [\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)]\; dv\, du$$

Spezialfall: $\vec{F} = \vec{n}$: Flächeninhalt von A:

$$\int_a^b \int_c^d |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)|\, dv\, du$$

12.3.3 Beispiel

Wir berechnen den Fluß des Vektorfeldes $\vec{F}(x,y,z) = (y,x,z^2)^T$ durch die Mantelfläche des folgenden Zylinders.



Parameterdarstellung der Mantelfläche mit Zylinderkoordinaten ($R = 5,\ h = 10$):

$$\vec{r}(\varphi, z) = (5 \cdot \cos\varphi,\ 5 \cdot \sin\varphi, z)^T$$

$$0 \le z \le 10 \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

Das Vektorfeld in Zylinderkoordinaten:

$$\vec{F}(x,y,z) = (y,x,z^2)^T = (5 \cdot \sin\varphi, 5 \cdot \cos\varphi, z^2)^T$$

Berechnung des Normalenvektors:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_z &= (-5 \cdot \sin\varphi, 5 \cdot \cos\varphi, 0)^T \times (0,0,1)^T = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -5 \cdot \sin\varphi & 5 \cdot \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (5 \cdot \cos\varphi, 5 \cdot \sin\varphi, 0)^T
\end{aligned}$$

Berechnung des Integranden:

$$\vec{F} \cdot [\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_z] = 50 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi = 25 \cdot \sin 2\varphi$$

Integration:

$$\iint\limits_{(A)} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{10} 25 \cdot \sin 2\varphi \, dz\, d\varphi \overset{[...]}{=} 0$$

12.4 Integralsätze von Gauß und Stoke

12.4.1 Satz (Gaußscher Integralsatz im Raum)

Es sei $\vec{F}$ ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld, V ein räumlicher Bereich mit der geschlossenen Oberfläche A und $\vec{n}$ die nach außen gerichtete Flächennormale. Dann gilt:

$$\iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{F}\, dV = \oiint\limits_{(A)} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA$$

Anmerkungen

(a) Im Strömungsmodell hat F die Bedeutung des Geschwindigkeitsfeldes einer strömenden Flüssigkeit:

$\oint\!\!\oint_{(A)} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA$	:	Flüssigkeitsmenge, die in der Zeiteinheit durch A fließt.
$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F}\, dV$	:	im Gesamtvolumen V in der Zeiteinheit erzeugte oder vernichtete Flüssigkeitsmenge

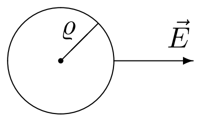
(b) Bei einem quellfreien Feld ($\operatorname{div} \vec{F} = 0$) ist der Gesamtfluß durch die geschlossene Oberfläche gleich 0.

Eine typische Anwendung: Bestimmung des elektrischen Feldes $\vec{E}$ eines homogen geladenen Zylinders.

Maxwell: $\operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\varrho_{el}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\text{Ladungsdichte}}{\text{el. Feldkonstante}}$

Gauß: Integralsatz für den Zylinder mit Radius R (sehr lang). Vollständige Rechnung siehe Papula Band 3, 9.3.1.

$$E(\varrho) = \begin{cases} \dfrac{\varrho_{el}}{2\varepsilon_0} \cdot \varrho & \varrho \leq R \\[2ex] \dfrac{\varrho_{el} \cdot R^2}{2\varepsilon_0} \cdot \varrho & \varrho \geq R \end{cases}$$



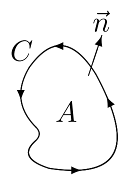
Querschnitt des Zylinders

12.4.2 Satz (Stoke'scher Integralsatz)

Es sei F ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld und C eine *einfach geschlossene* Kurve. Dann ist das Kurvenintegral von $\vec{F}$ längs C gleich dem Oberflächenintegral der Rotation von F über eine beliebige Fläche A, die durch C berandet wird.

$$\oint_C \vec{F}\, dr = \iint_{(A)} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA$$

Dabei wird die Umlaufrichtung für C wie folgt festgelegt: Ein Beobachter, der in die Richtung von $\vec{n}$ schaut, durchläuft C so, daß A links liegen bleibt.



Anmerkungen

(a) $\oiint\limits_A \operatorname{rot}\vec{F}\,\vec{n}\,dA$ wird auch als *Wirbelfluß* bezeichnet. Satz von Strokes: Der Wirbelfluß durch eine Fläche ist gleich der Zirkulation längs der Randkurve dieser Fläche.

(b) Der Wirbelfluß ist für alle Flächen, die von der gleichen Kurve berandet werden, gleich groß.

(c) Der Wirbelfluß durch eine geschlossene Fläche ist 0. Nach dem Gaußschen Integralsatz gilt nämlich (mit $\operatorname{rot}\vec{F}$ anstelle von $\vec{F}$):

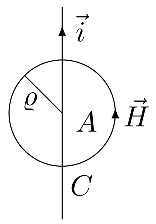
$$\iint\limits_{(A)} \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\cdot dA = \iiint\limits_{V} \underbrace{\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F})}_{0}\,dV = 0$$

(d) Eine stetige Kurve $C:(x(t),y(t),z(t))$, $a\le t\le b$ heißt *einfach geschlossen*, wenn $(x(a),y(a),z(a))=(x(b),y(b),z(b))$ und $(x(t_1),y(t_1),z(t_1))\neq(x(t_2),y(t_2),z(t_2))$, wenn $a\le t_1<t_2<b$.

Eine typische Anwendung: Bestimmung des Magnetfeldes $\vec{H}$ eines stromduchflossenen linearen Leiters.

Maxwell: $\operatorname{rot}\vec{H}=\vec{i}$ (Stromdichte)

Stokes: C: Kreisförmige magnetische Feldlinien, A: Kreisfläche



$$H(\varrho)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\varrho}\qquad(\varrho>0)$$

(siehe Papula, Band 3, 9.3.2.)

Kapitel 13

Unendliche Reihen

13.1 Zahlenreihen

13.1.1 Definition

Gegeben sei eine Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Bezeichnen wir die Summe der ersten n Glieder mit s_n, also $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1+a_2, \dots, s_n = a_1+a_2+\cdots+a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, so erhalten wir eine neue Folge $\{s_n\}_1^{\infty}$, die Folge der *Partialsummen* von $\{a_n\}$. Diese Folge heißt die zu $\{a_n\}$ gehörende *unendliche Reihe.*

13.1.2 Beispiele

(a) Geometrische Reihe: Es sei $a_1,\ q \in \mathbb{R} \setminus 1$

geometrische Folge $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$

zugehörige geometrische Reihe: $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_1 \cdot q^{k-1} = a_1 + a_1 \cdot q + a_2 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$

(b) Harmonische Reihe: $a_k = \frac{1}{k}$

$s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. z.B. $s_1 = 1$, $s_2 = 1{,}5$, $s_{50} = 5{,}18$

13.1.3 Definition: Konvergenz

Konvergiert die Folge $\{s_n\}$ gegen eine Zahl s, so sagen wir, die unendliche Reihe sei *konvergent* und besitze die *Summe* s. Schreibweise:

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Existiert der Grenzwert nicht, so heißt die Reihe *divergent.*

13.1.4 Beispiele

(a) Die geometrische Reihe mit $|q| < 1$ ist konvergent.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{k-1} = \lim_{k\to\infty} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\cdot(n+1)} = ?$ $\qquad \dfrac{1}{n\cdot(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \qquad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = 1 \end{aligned}$$

Bemerkung: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}$ (schwierig!)

(c) Die harmonische Reihe ist divergent: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} = \infty$.

$$s_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right)}_{>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right)}_{>8\cdot 116=\frac{1}{2}} +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{2^k+1} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}\right)}_{>2^k\cdot\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

13.1.5 Satz

Wenn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen mit den Summen a und b sind und $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, dann gilt:

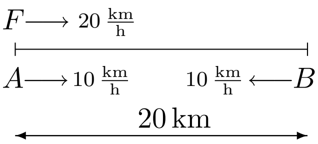
$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) = \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$$

13.1.6 Beispiele

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{6^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{6^n} = 3 \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\text{geom. Reihe}} - 2 \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n}_{\text{geom. Reihe}}$$

$$= 3 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - 2 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 3 - 1 = 2$$

(b) A, B: Fahrradfahrer, F: Fliege



A, B, F starten zusammen. F fliegt, bis sie B trifft, dann wendet sie und fliegt bis sie A trifft, usw. Man berechne die Länge der Strecke, die F bis zum Treffen von A und B zurücklegt hat.

$$\begin{aligned} s &= \frac{2}{3} \cdot 20 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 20 + \frac{1}{3^2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 20 + \cdots \\ &= \frac{2}{3} \cdot 20 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot 20 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 20 \end{aligned}$$

Einfachere Lösung: A und B treffen sich nach einer Stunde $\rightarrow$ 20 km

13.1.7 Satz

Wenn die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent ist, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Bemerkung: Diese Bedingung ist nur notwendig aber nicht hinreichend für die Konvergenz (z.B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent obwohl $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$)

13.1.8 Satz: Majoranten– und Minorantenkriterium

Gegeben sei die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

(i) Majorantenkriterium: Gibt es eine konvergente Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, so daß $|a_n| \leq c_n$, $(n \in \mathbb{N})$, dann ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

(ii) Minorantenkriterium: Gibt es eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ mit $a_n \geq d_n$, $(n \in \mathbb{N})$, und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n = \infty$, dann ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

13.1.9 Beispiele

(a) Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ konvergent? Wir wissen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ist konvergent, und $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$. $\Rightarrow$ Die Folge ist konvergent!

(b) Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ konvergent? $\quad \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} \geq \frac{1}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} = \infty$

13.1.10 Satz (Leibnitz)

Ist $\{a_n\}$ eine Nullfolge (d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$) mit $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > 0$, so ist die Reihe $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$ konvergent.

13.1.11 Definition: Absolute Konvergenz

Eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Bemerkungen

(a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ ist konvergent nach Satz (13.1.10), aber nicht absolut konvergent, da $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$.

(b) Konvergente Reihen, die nur nichtnegative Glieder besitzen, sind absolut konvergent.

(c) Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent (folgt aus dem Majorantenkriterium).

13.1.12 Satz (Wurzelkriterium)

Gegeben sei die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Ist die Folge $\left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergent gegen den Grenzwert a, so gilt:

(a) Ist $a < 1$, so ist die Reihe konvergent

(b) Ist $a > 1$, so ist die Reihe divergent

13.1.13 Beispiel

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{2}-1\right)^n$ ist konvergent, da $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{2}-1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (wegen 7.1.6.ii).

13.1.14 Satz (Quotientenkriterium)

Gegeben sei die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \neq 0$. Ist die Folge $\left\{|\frac{a_{n+1}}{a_n}|\right\}_1^{\infty}$ konvergent gegen a, so gilt:

(a) Ist $a < 1$, so ist die Reihe konvergent

(b) Ist $a > 1$, so ist die Reihe divergent

13.1.15 Beispiel

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ ist konvergent, da $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1$

(Man kann zeigen: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} = e$)

13.1.16 Einige „berühmte“ Reihen

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots = \infty$ harmonische Reihe

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log_e 2\right) = 0{,}577215\ldots$ (Eulersche Konstante)

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots = \log_e 2 \approx 0{,}693$

$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{6}$ (Euler, 1736)

$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\cdots = \infty$ (Es gibt „mehr“ Primzahlen als Quadratzahlen)

$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots = e$ (Eulersche Zahl)

allgemein: $\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots = e^x$ $(x \in \mathbb{R})$

13.2 Potenzreihen

13.2.1 Definiton

Unter einer *Potenzreihe* versteht man eine unendliche Reihe der Form

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(x-x_0)^n = a_0\cdot(x-x_0)^0 + a_1\cdot(x-x_0)^1 + a_2\cdot(x-x_0)^2 + \cdots$$

(alle Zahlen reell). Die Menge aller Zahlen x, für die die Reihe konvergiert heißt *Konvergenzbereich* der Potenzreihe. a_n : *Koeffizienten* der Potenzreihe, x_0 : *Entwicklungspunkt*.

Beispiel: $P(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ (geom. Reihe, $x_0 = 0$)
Diese Reihe konvergiert genau dann, wenn $|x| < 1$ (siehe (13.1.4)). Der Konvergenzbereich ist also ein Intervall: $(-1, 1)$, in diesem Intervall gilt: $P(x) = \frac{1}{1-x}$.

13.2.2 Satz

Zu jeder Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ gibt es eine reelle Zahl r, *Konvergenzradius* genannt, mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Die Potenzreihe konvergiert im Intervall $|x - x_0| < r$

(ii) Die Potenzreihe divergiert, wenn $|x - x_0| > r$

(iii) In den Randpunkten des Konvergenzbereiches kann die Reihe i.A. konvergieren oder divergieren

(iv) Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, so ist er gleich r

13.2.3 Beispiele

(a) Für die geometrische Reihe ist $a_n = 1$, $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$.
Divergenz in den Randpunkten $+1$ und -1:

$$+\mathbf{1}: \ 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty$$
$$-\mathbf{1}: \ 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots, \ s_n = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases} \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n \text{ existiert nicht}$$

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x_0 = 0)$

Konvergenzradius: $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) = \infty$

$r = \infty \Rightarrow$ Die Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ = Konvergenzbereich

(c) Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n$

$r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$
Die Reihe ist konvergent für $x = 0$.

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (x_0 = 0) \qquad r = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$
Randpunkte:

$\mathbf{x = 1:}$ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty$
$\mathbf{x = -1:}$ $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$ konvergiert nach Satz von Leibnitz

13.2.4 Eigenschaften von Potenzreihen

- Eine Potenzreihe ist im Innern ihres Konvergenzradius absolut konvergent
- Eine Potenzreihe darf im Innern ihres Konvergenzradius gliedweise differenziert und integriert werden. Die neuen Potenzreihen besitzen dabei denselben Konvergenzradius wie die ursprüngliche Reihe.

  Beispiel:

  $\frac{d}{dx}e^x = \frac{d}{dx}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\frac{x^n}{n!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum\limits_{n=1}\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$
- Zwei Potenzreihen dürfen im gemeinsamen Konvergenzbereich gliedweise addiert und subtrahiert werden. Die neuen Potenzreihen konvergieren dann mindestens im gemeinsamen Konvergenzbereich

13.2.5 Definition: Taylor–Reihe

f sei eine auf (a, b) beliebig oft differenzierbare Funktion und $x_0 \in (a, b)$. Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

die *Taylor–Reihe* von f im Punkt x. Es gibt drei Möglichkeiten:

- die Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$
- die Reihe besitzt einen positiven Konvergenzradius
- die Reihe konvergiert nur für $x = x_0$

Nach dem Satz von Taylor (8.4) gilt für jedes n (t zwischen x_0 und x):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$$

Deshalb konvergiert die Taylor–Reihe in x genau dann gegen $f(x)$. wemm dort das Restglied gegen 0 konvergiert.

13.2.6 Beispiele

(a) $f(x) = e^x, \quad x_0 = 0, \quad f^{(k)}(x) = e^x$

$f^{(k)} = 0\ (\forall k)$: Restglied

$\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}x^{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (t zwischen x_0 und x)

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \qquad$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f^{(n+1)}(t) = e^t \Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{6}x + \cdots$$

(b) Weitere Beispiele:

$$\begin{array}{lcll}
\sin x & = & x - \frac{1}{3!}\cdot x^3 + \frac{1}{5!}\cdot x^5 - \frac{1}{7!}\cdot x^7 + \cdots & (x \in \mathbb{R}) \\
\sinh x & = & x + \frac{1}{3!}\cdot x^3 - \frac{1}{5!}\cdot x^5 + \frac{1}{7!}\cdot x^7 - \cdots & (x \in \mathbb{R}) \\
\cos x & = & x - \frac{1}{2!}\cdot x^2 + \frac{1}{4!}\cdot x^4 - \frac{1}{6!}\cdot x^6 + \cdots & (x \in \mathbb{R})
\end{array}$$

(c) $f(x) = \ln(1+x)$

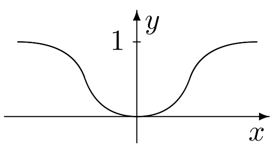
$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1-x)^2}, \quad f^{(n)} = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)! \quad (n \geq 1)$

$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$

Taylor–Reihe für f: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot x^n = \ln(1+x) \qquad (-1 < x < 1)$

Konvergenzradius: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$

(d) Wir definieren die Funktion f durch $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, wenn $x \neq 0$ und $f(0) = 0$.



Man kann zeigen, daß f beliebig oft differenzierbar ist und $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k = 1, 2, 3, \ldots$

$\Rightarrow$ Die Taylor–Reihe ist die Nullfunktion und stellt f somit nur im Punkt $x = 0$ dar.

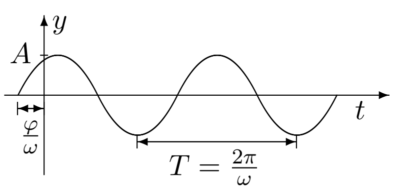
13.3 Fourier–Reihen

13.3.1 Einleitung

In einfachen Fällen läßt sich ein periodischer Vorgang (z.B. Wechselspannung) durch eine sogenannte *harmonische Schwingung*

$$y(t) = A\cdot\sin(\omega\cdot t + \varphi) \quad \text{oder} \quad y(t) = A\cdot\cos(\omega\cdot t + \varphi)$$

beschrieben.



ω : *Kreisfrequenz*

$|A|$: *Amplitute*

T : *Schwingungsdauer*

Nicht sinusförmige aber periodische Vorgänge:

- Kippschwingung (Sägezahn)
- Sinusimpuls (nur positive/negative Halbwellen)

Frage: Läßt sich eine nichtsinusförmige Schwingung aus harmonischen Schwingungen zusammensetzen?

13.3.2 Definition: Trigonometrische Reihe

Man nennt eine Reihe der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot x)]$$

eine *trigonometrische Reihe*. Sind alle a_n (alle b_n) gleich 0, so spricht man von einer *Sinusreihe* (*Kosinusreihe*). Im Weiteren betrachten wir den Spezialfall $\omega = 1$, der allgemeine Fall läßt sich auf diesen zurückführen.

Bemerkungen

(a) $\sin(n \cdot x)$ und $\cos(n \cdot x)$ sind periodisch mit der Periode 2π

(b) Die Menge aller x, für die die obige Reihe konvergiert, läßt sich nicht so einfach beschreiben wie bei Potenzreihen

13.3.3 Satz

Wenn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$, dann konvergiert die trigonometrische Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x)]$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$. Die Funktion f ist stetig und periodisch mit der Periode 2π.

Bemerkung: Die Bedingungen des Satzes sind nur hinreichend aber nicht notwendig für die Konvergenz. So konvergiert z.B. die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$, obwohl $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

13.3.4 Definition

Es sei f über $[0,\ 2\pi]$ integrierbar. Dann heißen die Zahlen

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(n \cdot x)\, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(n \cdot x)\, dx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

die *Fourier–Koeffizienten* der Funktion f. Die mit diesen Zahlen gebildete Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x)]$$

heißt die *Fourier–Reihe* von f.

Bemerkungen

(a) In den Integralen kann man $\int\limits_0^{2\pi}$ durch $\int\limits_{-\pi}^{\pi}$ ersetzen

(b) Ist f eine gerade Funktion, so ist $b_n = 0$, ist f eine ungerade Funktion, so gilt $a_n = 0$ für alle n

Eine Funktion heißt *stückweise glatt* auf $[a, b]$, wenn f' bis auf endlich viele Punkte in $[a, b]$ existiert und f' stückweise stetig ist.

13.3.5 Satz

Es sei f eine 2π–periodische Funktion auf $\mathbb{R}$, die auf $[0, 2\pi]$ stückweise glatt ist. Dann konvergiert die zu f gehörende Fourier–Reihe $s(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und es gilt:

$$s(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

($+0$, -0 : Grenzwerte von links bzw. rechts). Ist x eine Stetigkeitsstelle, so ist $s(x) = f(x)$.

13.3.6 Beispiele

(a) Rechteckkurve f mit $f(x) = 1$, $0 \le x \le \pi$ und $f(x) = -1$, $\pi < x < 2\pi$

f ist ungerade $\Rightarrow a_n = 0$

$$b_n = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(n \cdot x)\, dx = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} 1 \cdot \sin(n \cdot x)\, dx + \int\limits_{\pi}^{2\pi} (-1) \cdot \sin(n \cdot x)\, dx$$

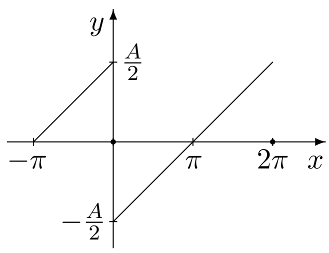
$$= \tfrac{1}{\pi} \left[-\tfrac{1}{n} \cdot \cos(n \cdot x)\right]_0^{\pi} - \left[-\tfrac{1}{n} \cdot \cos(n \cdot x)\right]_{\pi}^{2\pi} = \tfrac{2}{n \cdot \pi}(1 - \cos(n \cdot \pi))$$

$\Rightarrow b_n = 0$, falls $n = 2k$ gerade ist und $b_n = b_{2k-1} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2k-1}$, falls n ungerade ist.

Wir erhalten:

$f(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)\cdot x}{2k-1} = \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 2x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right]$

(b) Sägezahn–Funktion: $f(t) = \frac{A}{2\pi} \cdot t - \frac{A}{2}, \quad 0 < t < 2\pi, \quad f(0) = 0$



$f(t)$ ist ungerade $\Rightarrow a_n = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{A}{2\pi} - \frac{A}{2}\right) \cdot \sin(nt)\, dt$$
$$= \ldots = -\frac{A}{n \cdot \pi}$$

$f(t) = -\frac{A}{\pi} \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin(nt) = -\frac{A}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \cdots\right)$

$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(\frac{2}{\pi}) = \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} = -\frac{A}{4} = \sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)}(-1)^l$

$\Rightarrow \sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)}(-1)^l = \frac{A}{4}$

Kapitel 14

Gewöhnliche Differentialgleichungen

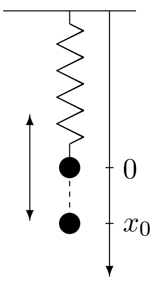
14.1 Grundlegende Begriffe

Mathematische Beschreibung physikalischer Probleme.

14.1.1 Beispiel: Schwingende Feder

Eine Kugel der Masse m hänge an einer Feder mit Federkonstante k. Zur Zeit $t = 0$ werde die Feder um x_0 gedehnt und dann losgelassen.

Aufgabe: Beschreibe die Bewegung



Nach unten zeigende Bewegungsrichtung.
Nullpunkt: Mittelpunkt der Kugel in Ruhelage.
$x(t)$: Lage des Mittelpunktes der Kugel zur Zeit t

Grundgesetz der Mechanik: $m \cdot a = m \cdot x'' = \sum F$

Federkraft: $-k \cdot x(t)$, $(k > 0)$

Daraus folgt für die Bewegung:

$$m \cdot x''(t) = -k \cdot x(t) \tag{14.1}$$

14.1.2 Definition

Eine Gleichung zur Bestimmung einer Funktion heißt *Differentialgleicheung*, wenn sie mindestens eine Ableitung der gesuchten Funktion enthält.
Die Ordnung der in der Differentialgleichung vorkommenden höchsten Ableitung der gesuchten Funktion heißt *Ordnung der Differentialgleichung.*

Hängt die gesuchte Funktion von nur einer Veränderlichen ab, so nennt man die Differentialgleichung *gewöhnlich*. Enthält die Differentialgleichung partielle Ableitungen, so heißt sie *partiell*.

Beispiele

(a) Die Gleichung (14.1) ist eine gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung 2 für die Funktion $x(t)$.

(b) $y'''(x)+2y'(x)+3y(x) = \sin x$ ist eine gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung für $y(x)$.

(c) $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$ ist eine partielle Differentialgleichung der Ordnung 1 für die Funktion $u(x, y)$

Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung n hat die *implizite Form*

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

falls die Auflösung nach der höchsten Ableitung möglich ist, *explizite Form*

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

Beispiel: $y' = x \Rightarrow y(x) = \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

Die Menge aller Lösungen einer Differentialgleichung heißt deren *allgemeine Lösung* oder *allgemeines Integral*.

Beispiel: Die allgemeine Lösung der DGL (14.1) mit $m = 1$, $k = 1$

$$X = \{x : x(t) = c_1 \cdot \cos t + c_2 \cdot \sin t,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

Probe durch Einsetzen der Lösung in die DGL:

$$-1 \cdot x''(t) = -1 \cdot x(t)$$

Beweis später.

Es ist üblich auch $x(t) = c_1 \cdot \cos t + c_2 \cdot \sin t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ als allgemeine Lösung zu bezeichnen. Die allgemeine Lösung enthält Konstanten: *Integrationskonstanten.*

Spezielle oder *partikuläre* Lösung: spezielle Wahl aller Konstanten in der allgemeinen Lösung.

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y^{(n)} = f\left(x, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

sowie x_0, y_0, y_1, $\dots$, $y_{n-1} \in \mathbb{R}$: *Anfangswertproblem*: Die Aufgabe, eine Funktion zu finden, die der Differentialgleichung genügt und die Bedingungen

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \qquad (14.2)$$

y_0, y_1, y_2, $\dots$, y_{n-1}: *Anfangswerte*, (14.2): *Anfangsbedingungen*

Beispiel: Im Beispiel (14.1.1) sei der Anfangswert x_0 und der Anfangszeitpunkt $t = 0$.
Anfangsbedingungen: $x(0) = 0$ und $x'(0) = 0$

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \cdot \cos t + c_2 \cdot \sin t \qquad c_1,\ c_2 = \mathbb{R} \\ x'(t) &= -c_1 \cdot \sin t + c_2 \cdot \cos t \end{aligned}$$

Einsetzen der Randbedingungen:

$$\begin{aligned} x_0 &= x\ (0) = \ \ c_1 \cdot \cos(0) + c_2 \cdot \sin(0) \qquad \Rightarrow c_1 = x_0 \\ 0 &= x'(0) = -c_1 \cdot \sin(0) + c_2 \cdot \cos(0) \qquad \Rightarrow c_2 = 0 \end{aligned}$$

Die gesuchte Funktion lautet also $x(t) = x_0 \cdot \cos t$

14.2 Differentialgleichung 1. Ordnung

Spezielle Lösungsmethoden

14.2.1 Trennung der Veränderlichen

Eine Differentialgleichung der Form $y' = f(x) \cdot g(y)$ heißt *separabel.*

Lösungsmethode für separable Differentialgleichungen

Beispiel: $y' = y \cdot \cos x$

1. $\frac{dy}{dx} = y \cdot \cos(x) \qquad / \cdot dx,\ \cdot \frac{1}{y}$
2. $\frac{1}{y} \cdot dy = \cos(x) \cdot dx$
3. $\int \frac{1}{y} \cdot dy = \int \cos(x) \cdot dx$
4. $\ln |y| = \sin(x) + c$
5. $|y| = e^{\sin(x)} \cdot e^c = e^{\sin(x)} \cdot c_1 \qquad (c_1 = e^c > 0)$
6. $y = c_1 \cdot e^{\sin(x)}$ oder $y = -c_1 \cdot e^{\sin(x)}$

$\Rightarrow y = c_1 \cdot e^{\sin(x)}$ für $c_1 \in \mathbb{R}$

14.2.2 Substitution eines linearen Terms

Die Differentialgleichung $y' = f(ax + by + c)$, $(a, b, c \in \mathbb{R})$ kann durch Substitution $z = ax + by + c$ in eine separable Differentialgleichung überführt werden:

$$z' = a - b \cdot y' = a - b \cdot f(z)$$

$z' = a - b \cdot f(z) \cdot 1$ ist separabel.

Beispiel: $y' = (x + y)^2, \quad z = x + y \Rightarrow z' = 1 + y' = 1 + z^2$

1. $\frac{dz}{dx} = 1 + z^2$
2. $\frac{1}{1+z^2} \cdot dz = 1 \cdot dx$
3. $\int \frac{1}{1+z^2} \cdot dz = \int 1 \cdot dx$
4. $\arctan z = x + c \qquad \frac{-\pi}{2} \le x + c \le \frac{\pi}{2}$
5. $z = \tan(x + c)$
6. $x + y = \tan(x + c) \qquad$ für $\frac{-\pi}{2} + c \le x \le \frac{\pi}{2} + c$

$\Rightarrow y = -x + \tan(x + c)$

14.2.3 Gleichgradige Differentialgleichungen

Die Differentialgleichung $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ heißt *gleichgradige Differentialgleichung* oder *Ähnlichkeitsdifferentialgleichung*. Substitution:

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \cdot z \Rightarrow y' = 1 \cdot z + x \cdot z' = f(z) \Rightarrow z' = \frac{1}{x}(f(z) - z)$$

Diese Differentialgleichung ist separabel.

Beispiel: $(x^2 + y^2) \cdot y' = x \cdot y$

$$y' = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} = \frac{\frac{y}{x}}{1 + (\frac{y}{x})^2}$$

Mit Substitution: $z = \frac{y}{x}$, $y' = x \cdot z + z$ ergibt sich $(x, y \neq 0)$

$$x \cdot z' + z = \frac{z}{1 + z^2} \Rightarrow x \cdot z' = \frac{z}{1 + z^2} - \frac{z(1 + z^2)}{1 + z^2} = \frac{-z^3}{1 + z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1 + z^2}{z^3} \cdot \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x} \Rightarrow \int \left(\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z}\right) dz = -\int \frac{1}{x}\, dx$$

$$\frac{z^{-2}}{2} + \ln|z| = -\ln|x| + c$$

Rücksubstitution: Setzt man $z = \frac{y}{x}$ ein, so folgt:

$$-\frac{1}{2}\frac{x^2}{y^2} + \ln\left|\frac{y}{x}\right| = -\ln|x| + c$$

$$-\frac{1}{2}\frac{x^2}{y^2} + \ln|y| = c \Rightarrow x^2 = 2 \cdot (\ln|y| - c) \cdot y^2$$

Lösung in expliziter Form, $y = 0$ ist auch Lösung.

14.2.4 Lineare Differentialgleichung erster Ordnung

Die Differentialgleichung $y' + f(x) \cdot y = g(x)$ heißt *lineare Differentialgleichung erster Ordnung*. Man nennt sie *homogen*, wenn $g = 0$. g heißt *Störglied.*

Satz: Es sei Y_h die Menge aller Lösungen der homogenen Differentialgleichung $y' + y \cdot f(x) = 0$ und y_p eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $y' + f(x) \cdot y = g(x)$. Dann ist $Y = \{y : y = y_h + y_p,\ y_h \in Y_h\}$ die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Probe: $y' = y_h' + y_p'$ einsetzen: $y_h' + y_p' + f(x)(y_h + y_p) = 0 + g(x)$

Lösungsmethode: Erläuterung an dem Beispiel $y' + 2xy = x$

I. Lösung der homogenen Gleichung $y' + 2xy = 0$
   $\Rightarrow \frac{dy}{dx} + 2xy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -2x \cdot dx \Rightarrow \ln|y| = -2\frac{x^2}{2} + c$

   $\Rightarrow |y| = k_1 \cdot e^{-x^2} \Rightarrow y_h = k \cdot e^{-x^2} \quad (k \in \mathbb{R})$

II. Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung. Methode: *Variation der Konstanten.* Wir ersetzen in der Lösung der homogenen Gleichung die Konstante k durch $k(x)$:

$$y_p = k(x) \cdot e^{-x^2} \Rightarrow y_p' = k'(x) \cdot e^{-x^2} + k(x) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x)$$

   Einsetzen der speziellen Lösung y_p in $y' + 2xy = x$:

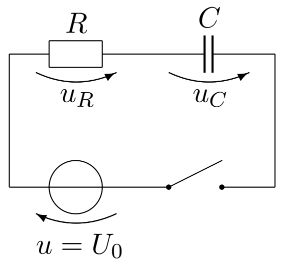
$$k'(x) \cdot e^{-x^2} + k(x) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) + 2x \cdot k(x) \cdot e^{-x^2} = x \Rightarrow k'(x) \cdot e^{-x^2} = x$$

$$k'(x) \cdot (x) = x \cdot e^{x^2} \Rightarrow k(x) = \int x \cdot e^{x^2}\, dx = \frac{e^{x^2}}{2} + c$$

   Wir setzen $c = 0 \Rightarrow k(x) = \dfrac{e^{x^2}}{2} \Rightarrow y_p = \dfrac{1}{2}.$

   Allgemeine Lösung: $y = k \cdot e^{-x^2} + \dfrac{1}{2} \quad (k \in \mathbb{R})$

Beispiel: Ladevorgang eines Kondensators



Maschensatz: $u_R + u_C = u = U_0$

$u_R = R \cdot i = R \cdot \frac{dq}{dt} = R \cdot \frac{d}{dt}(C \cdot u_C) = R \cdot C \cdot \dot{U}_C$

$\Rightarrow \underbrace{RC}_{\tau} \cdot \dot{u}_c + u_c = U_0$

homogene Differentialgleichung: $\dot{u}_C = -\dfrac{1}{\tau} \cdot u_C$

I. Trennung der Veränderlichen
$\int \frac{du_C}{u_C} = -\frac{1}{\tau} \int dt \quad \Rightarrow \quad \ln |u_C| = -\frac{1}{\tau} \cdot t + c \quad \Rightarrow \quad u_C = e^{-\frac{1}{\tau} \cdot t} \cdot c_1$

II. Variation der Konstanten
$u_{Cp} = e^{-\frac{1}{\tau} \cdot t} \cdot c_1(t) \Rightarrow \dot{u}_{Cp} = e^{-\frac{1}{\tau} \cdot t} \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) \cdot c_1(t) + c_1{}'(t) \cdot e^{-\frac{1}{\tau} \cdot t}$

Einsetzen: $U_0 = \tau \cdot \left(\frac{e^{-\frac{1}{\tau} \cdot t} \cdot c_1(t)}{-\tau} + c_1{}'(t) \cdot e^{-\frac{1}{\tau} \cdot t} \right) + e^{-\frac{1}{\tau} \cdot t} \cdot c_1(t)$

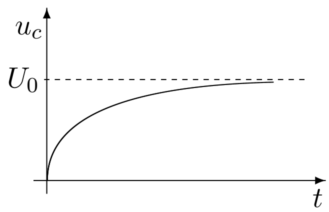
$\Rightarrow \tau \cdot c_1{}'(t) \cdot e^{-\frac{1}{\tau} \cdot t} = U_0 \Rightarrow \tau \cdot c_1{}'(t) = U_0 \cdot e^{\frac{t}{\tau}}$

$\Rightarrow c_1(t) = U_0 \cdot e^{\frac{t}{\tau}}$

Allgemeine Lösung: $u_C = c \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + U_0$

Anfangswertaufgabe: $u_C(0) = 0$

$$
\begin{aligned}
u_C &= c \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + U_0 \\
0 &= c \cdot 1 + U_0 \Rightarrow c = -U_0 \\
\Rightarrow u_C &= (-U_0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + U_0
\end{aligned}
$$



14.2.5 Satz

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $y' + f(x) \cdot y = g(x)$ ist

$$y = e^{-\int f(x)\,dx} \cdot \left(k + \int g(x) \cdot e^{\int f(x)\,dx}\,dx \right) \qquad (k \in \mathbb{R})$$

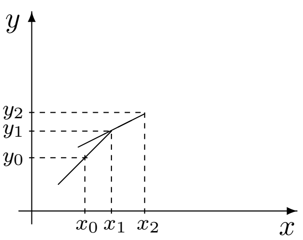
14.2.6 Geometrische Deutung, Isoklinen

Wir betrachten die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$

(A) **Voraussetzung:** Das zu $y(x_0) = y_0$ gehörige Anfangswertproblem besitzt eine eindeutige Lösung. In jedem Punkt $P(x_0, y_0)$ ist ein Funktionswert $f(x_0, y_0)$ gegeben. Wegen $y' = f(x_0, y_0)$ ist dieser Wert der Anstieg der durch $P(x_0, y_0)$ gehenden Lösungskurve an dieser Stelle.

Annäherung der Lösungskurve in einer Umgebung von P durch ein kleines Tangentenstück, *Richtungselement*.

Methode: Wir wählen eine Länge des Richtungselementes mit dem Mittelpunkt (x_0, y_0). Sei (x_1, y_1) der rechte Eckpunkt. y_1 ist dann eine Näherung für die gesuchte Lösung an der Stelle x_1. Wir konstruieren ein weiteres Richtungselement mit dem Mittelpunkt (x_1, y_1), usw.

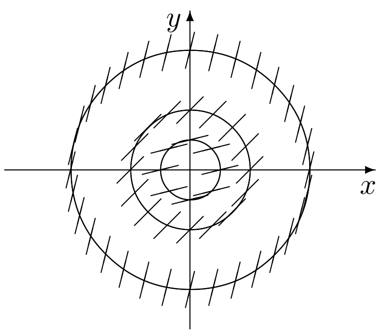


(B) **Isoklinenverfahren:** Definition: Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. Jede durch die Gleichung $f(x, y) = c$ bestimmte Kurve heißt Isokline der Differentialgleichung zum Wert c.

Mit Hilfe der Isoklinen wollen wir geometrisch Näherungslösungen skizzieren:

(1) Zeichnung einiger Isoklinen
(2) Wir tragen auf ihnen einige Richtungselemente ein
(3) Die Näherungen für die Lösungskurven sind dann so zu ziehen, daß sie in den Schnittpunkten mit den Isokliden parallel zu den zugehörigen Richtungselementen verlaufen

Beispiel: $y' = x^2 + y^2$
Die Isoklinen $f(x, y) = c$ sind Kreise mit dem Radius $\sqrt{c}$.



Isoklinen und dazugehörige Richtungselemente für $c = 4 \Rightarrow \sqrt{c} = 2$, $c = 1 \Rightarrow \sqrt{c} = 1$, $c = 0{,}25 \Rightarrow \sqrt{c} = \frac{1}{2}$

14.2.7 Definition: Exakte Differentialgleichungen

Mit

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0 \tag{14.3}$$

meint man die Aufgabe, bei konstanten Funktionen P und Q, entweder Funktionen $y = y(x)$ zu bestimmen, die der Differentialgleichung $P(x, y) + Q(x, y) \cdot y' = 0$ genügen (Division durch dx), oder die Aufgabe, Funktionen $x = x(y)$ zu ermitteln, die der Differentialgleichung $P(x, y) \cdot x' + Q(x, y) = 0$ geügen (Division durch dy). Die Differentialgleichung (14.3) heißt *exakt*, falls es eine Funktion $U(x, y)$ mit

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = Q(x, y)$$

gibt.

Bemerkung: (14.3) ist genau dann exakt, wenn der Ausdruck $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dx$ ein vollständiges Differential ist (siehe Def. 6.5.5). Aus Satz (6.5.6) folgt: Die Differentialgleichung ist genau dann exakt, wenn

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Beispiel: Die Differentialgleichung

$$e^{-y} + (1 + x \cdot e^{-y}) \cdot \underbrace{y'}_{\frac{dy}{dx}} = 0 \longrightarrow \underbrace{e^{-y}}_{P}\, dx + \underbrace{(1 - x \cdot e^{-y})}_{Q}\, dy = 0$$

ist exakt: $P_y = -e^{-y} = Q_x = -e^{-y}$

14.2.8 Satz

Ist die Differentialgleichung (14.3) exakt, so werden die Lösungen $y = y(x)$ bzw. $x = x(y)$ durch

$$U(x, y) = c \qquad (c \in \mathbb{R})$$

implizit dargestellt.

14.2.9 Beispiel

$e^{-y}\, dx + (1 - x \cdot e^{-y})\, dy = 0$ ist exakt, deshalb existiert eine Funktion U mit $U_x = e^{-y}$ und $U_y = 1 - x \cdot e^{-y}$.
U_x nach x integrieren (y als Konstante betrachten): $U_y(x, y) = x \cdot e^{-y} + C(y)$.
Dieses Ergebnis wird abgeleitet und in U_y eingesetzt:

$$\underbrace{-x \cdot e^{-y} + C'(y)}_{U_y'(x,y)} = 1 + x \cdot e^{-y} \Rightarrow C'(y) = 1 \Rightarrow C(y) = y + K$$

(wir wählen $K = 0$, da nur eine U benötigt wird) $\Rightarrow U = x \cdot e^{-y} + y$

Implizite Angabe der Lösungen:

$$U(x,y) = x \cdot e^{-y} + y = c \qquad (x \in \mathbb{R})$$

14.2.10 Integrierender Faktor

Ist die Differentialgleichung

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

nicht exakt, so versucht man mit einem *integrierenden Faktor* (oder *Multiplikator*) $v = v(x,y)$ eine *äquivalente Differentialgleichung* (d.h. mit den selben Lösungen) zu erhalten, die exakt ist. Man betrachte dazu den Ansatz

$$\underbrace{v(x,y) \cdot P(x,y)\,dx}_{\hat{P}(x,y)} + \underbrace{v(x,y) \cdot Q(x,y)\,dy}_{\hat{Q}(x,y)} = 0$$

Dabei ist $v(x,y) \neq 0$ so zu bestimmen, daß $\hat{P}_y = \hat{Q}_x$ gilt. Mitunter existieren Multiplikatoren, die nur von x oder von y allein abhängen.

1. Nehmen wir an, daß $\frac{P_y - Q_x}{Q} = h(x)$, also die linke Seite unabhängig von y ist. Dann existiert ein Multiplikator $v = v(x)$, der aus der homogenen linearen Differentialgleichung $v'(x) - h(x) \cdot v(x) = 0$ bestimmt werden kann.
2. Ist $\frac{P_y - Q_x}{Q} = h(y)$, also die linke Seite unabhängig von x, so existiert ein Multiplikator $v = v(y)$, der aus der Gleichung $v'(y) + h(y) \cdot v(y) = 0$ bestimmt wird.

14.2.11 Beispiel

$$\underbrace{y \cdot (2y - 3x)}_{P}\,dx + \underbrace{x \cdot (2y - x)}_{Q}\,dy = 0$$

$P_y - Q_x = 2y - x$

$\dfrac{P_y - Q_x}{Q} = \dfrac{2y - x}{x \cdot (2y - x)} = \dfrac{1}{x}$ hängt nur von x ab $\Rightarrow v(x)$

$v'(x) - \dfrac{1}{x} \cdot v(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{dv}{v} = \dfrac{dx}{x}$ (separabel)

$\Rightarrow \ln|v| = \ln|x| + c \overset{c=0}{\longrightarrow} v(x) = x$ ist ein Multiplikator

$$\underbrace{xy \cdot (2y - 3x)}_{\hat{P}}\,dx + \underbrace{x^2 \cdot (2y - x)}_{\hat{Q}}\,dy = 0 \qquad \text{ist exakt}$$

Bestimmung von U

$U_x = \hat{P} = xy \cdot (2y + 3x) \longrightarrow U = \int xy \cdot (2y+3x)\, dx = x^2y^2 - x^2y + c(x)$
$U_y = \hat{Q} = x^2 \cdot (2y - x)$
$U_y = 2x^2 \cdot y - x^3 + c'(y) = 2x^2y - x^3 \quad \Rightarrow c' = 0 \Rightarrow c(y) = k$

Sei $k = 0$: $U = x^2y^2 - x^3y$

Die allgemeine Lösung: $U(x,y) = x^2y^2 - x^3y = c \qquad (c \in \mathbb{R})$

14.3 Physikalische Anwendungen

14.3.1 Freier Fall aus großer Höhe (Fall ohne Reibung)

K	:	Körper
m	:	Masse von K
$s(t)$	:	Entfernung von K vom Erdmittelpunkt zur Zeit t
$v(t)$	:	Fallgeschwindigkeit von K
R	:	Erdradius ($\approx 6370\,\mathrm{km}$)
g	:	Erdbeschleunigung ($\approx 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$)

Gravitationskraft: $F = -g \cdot m \cdot \dfrac{R^2}{s^2}$

Grundgesetz der Mechanik: $F = m \cdot a = m \cdot \dfrac{dv}{dt}$

Daraus ergibt sich für die Bewegung die Gleichung:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = -g \cdot m \cdot \frac{R^2}{s^2}$$

Nach der Kettenregel ist: $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{ds}\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{dv}{ds} \cdot v$

$\Rightarrow \quad v \cdot \dfrac{dv}{ds} = -g \cdot \dfrac{R^2}{s^2}$ (wobei wir v in Abhängigkeit von s betrachten)

Diese Differentialgleichung ist separabel. Lösung:

$$v^2 = \frac{2 \cdot g \cdot R^2}{s} + 2 \cdot k \qquad (k \in \mathbb{R}) \tag{14.4}$$

Beispiele

(a) Ein Körper falle aus einer Höhe von 10 km auf die Erde. Man berechne die Geschwindigkeit, mit der er an der Erdoberfläche ankommt.

$v_0 = v(6370 + 10) = 0 \quad \Rightarrow \quad s = 6380$ in (14.4)

$$2 \cdot k = \frac{2 \cdot g \cdot R^2}{6380}$$

$$v^2 = 2 \cdot 9{,}81 \cdot 1000 \cdot 6370 \cdot \left(1 - \tfrac{6370}{6380}\right) \quad \Rightarrow \quad v = 1593\,\tfrac{\text{km}}{\text{h}}$$

(b) Fordern wir $\lim\limits_{s\to\infty} v(s) = 0$, so ist $k = 0$ und

$$v^2(s) = \frac{2 \cdot g \cdot R^2}{s} \quad \text{und} \quad v(R) = \sqrt{2 \cdot g \cdot R} = 11{,}8\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Mit dieser Geschwindigkeit würde ein Körper (beliebiger Masse) aus dem „Unendlichen kommend“ auf der Erdoberfläche auftreffen. Umgekehrt müsste ein Körper (beliebige Masse) diese Geschwindigkeit mindestens haben, wenn er den Anziehungsbereich der Erde verlassen soll (*Fluchtgeschwindigkeit*).

14.3.2 Radioaktiver Zerfall

Beim radioaktiven Zerfall ist die Geschwindigkeit des Zerfalls proportional zu der vorhandenen Menge des Stoffes.

$n(t)$: die Menge zur Zeit t

$n'(t) = -\lambda \cdot n(t), \qquad (\lambda > 0) \qquad$ ($n'(t)$ ist negativ, DGL separabel)

Lösung: $n(t) = k \cdot e^{-\lambda \cdot t} \qquad (k \in \mathbb{R})$

Für $t = 0$: $\quad n(0) = k \Rightarrow n(t) = n(0) \cdot e^{-\lambda t}$

14.3.3 Newtonsches Abkühlungsgesetz

Die Abkühlungsgeschwindigkeit eines Körpers in bewegter Luft ist proportional zu der Temperaturdifferenz zwischen der Temperatur des Körpers und der Temperatur der Luft.

$T(t)$: Temperatur des Körpers zur Zeit t

T_L : Temperatur der Luft

$$T'(t) = -\alpha \cdot (T(t) - T_L) \qquad (a > 0)$$

Diese Differentialgleichung ist separabel. Lösung:

$$T(t) = T_L + k \cdot e^{-\alpha t} \qquad (k \in \mathbb{R})$$

Beispiel: Ein Körper kühle sich in 10 Minuten von 300°C auf 200°C ab, wobei die Temperatur der Luft 30°C beträgt.
Wann hat sich dieser Körper auf 100°C abgekühlt?

$$\begin{aligned}
T(t) &= 30 + k \cdot e^{-\alpha t} \\
T(0) &= 300 = 30 + k \cdot e^{-\alpha \cdot 0} = 30 + k \quad \Rightarrow \quad k = 270 \\
T(10) &= 200 = 30 + 270 \cdot e^{-\alpha \cdot 10} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 0{,}0463 \\
T(t) &\approx 30 + 270 \cdot e^{-0{,}0463 \cdot t}
\end{aligned}$$

Gesucht: $T(t) = 100 \quad \Rightarrow \quad t \approx 29{,}16$

14.3.4 Bewegung mit Reibung

An einem Massepunkt der Masse m greife die äußere Kraft F an, der Bewegung wirke dabei die zur Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft $F_r = -r \cdot v(t), \quad (r > 0)$ entgegen.
r : *Reibungskoeffizient*, $\quad v(t)$: Geschwindigkeit

Grundgesetz der Mechanik: $m \cdot v'(t) = F - r \cdot v(t) \Rightarrow v + \frac{m}{r} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{F}{r}$
Lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Lösung:

$$v(t) = k \cdot e^{-\frac{m}{r} \cdot t} + \frac{F}{r}$$

ist z.B. $v = 0$ zur Zeit $t = 0$, so folgt $k = -\frac{F}{r}$.

$$v(t) = \frac{F}{r} \cdot \left(1 - e^{-\frac{m}{r} \cdot t}\right), \qquad \lim_{t \to \infty} = \frac{F}{r}$$

14.4 Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit *konstanten Koeffizienten*:

$$y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f(x) \qquad (a_0,\, a_1 \in \mathbb{R})$$

Ist $f = 0$, so heißt die Differentialgleichung *homogen*, sonst *inhomogen*.
f: *Störfunktion*, *Störglied*

14.4.1 Satz

Ist Y_h die Menge aller Lösungen der homogenen Differentialgleichung

$$y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$$

und y_p eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f(x)$$

so ist $Y = \{y : y = y_h + y_p \text{ mit } y_h \in Y_h\}$ die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Lösungsweg: Man bestimmt

(a) alle Lösungen der homogenen Differentialgleichung

(b) eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (Ansatz)

Die homogene Differentialgleichung

Das Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0$ heißt *charakteristisches Polynom* der Differentialgleichung, die Gleichung $p(\lambda) = 0$ heißt *charakteristische Gleichung.* $p(\lambda) = 0$ hat zwei Lösungen, $\lambda_{1/2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - a_0}$.

14.4.2 Satz

Es seien λ_1 und λ_2 die Lösungen der charakteristischen Gleichung der Differentialgleichung $y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$. Dann ist die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung:

(i) $y = A_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + A_2 \cdot e^{\lambda_2 x}, \quad (A_1,\, A_2 \in \mathrm{R})$ falls $\lambda_1,\, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1 \neq \lambda_2$

(ii) $y = (A_1 + A_2 \cdot x) \cdot e^{\lambda_1 x}, \quad (A_1,\, A_2 \in \mathbb{R})$ falls $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$

(iii) $y = (A_1 \cdot \cos(\beta x) + A_2 \sin(\beta x)) \cdot e^{\alpha x}$ falls $\lambda_1,\, \lambda_2 = \alpha \pm i\,\beta$ mit $\beta \neq 0$

14.4.3 Beispiele

(a) $y'' + 4y' - 5y = 0$, char. Gleichung: $\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\, \lambda_2 = -5$
allgemeine Lösung: $y_H = A_1 \cdot e^x + A_2 \cdot e^{-5x}$

(b) $y'' + 4y' + 4y = 0$, char. Gleichung: $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2$
allgemeine Lösung: $y_H = (A_1 + A_2 \cdot x) \cdot e^{-2x}$

(c) $y'' + 4y' + 13y = 0$, char. Gleichung: $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = -2 \pm 3i$
allgemeine Lösung: $y_H = (A_1 \cdot \cos(3x) + A_2 \cdot \sin(3x)) \cdot e^{-2x}$

Die inhomogene Differentialgleichung

Bestimmung einer speziellen Lösung, wenn die rechte Seite eine spezielle Form hat.

14.4.4 Satz

Gegeben sei die Definition

$$y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = p_n(x) \cdot e^{bx}$$

wobei p_n ein Polynom vom Grade n ist. Dann gibt es ein Polynom q_n, vom Grade n, so daß

(i) falls b nicht Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist,
die Funktion $y_p = q_n(x) \cdot e^{bx}$

(ii) falls b einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist,
die Funktion $y_p = x \cdot q_n(x) \cdot e^{bx}$

(iii) falls b zweifache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist,
die Funktion $y_p = x^2 \cdot q_n(x) \cdot e^{bx}$

eine Lösung der Differentialgleichung ist.

Bemerkung: Im Falle (ii) spricht man von *einfacher Resonanz*, im Falle (iii) von *zweifacher Resonanz*.

14.4.5 Beispiele

(a) Man bestimme eine spezielle Lösung der Differentialgleichung $Y'' + y' - 2y = x^2$, $b = 0$, $n = 2$.

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, $b = 0$ ist keine Nullstelle.

$\Rightarrow$ Ansatz: $y_p = q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$.

Bestimmung von A, B, C durch Einsetzen in Differentialgleichung:

${y_p}' = 2Ax+B$, ${y_p}'' = 2A, \Rightarrow -2Ax^2+(2A-2B)x+(2A+B-2C) = x^2$

Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{array}{ll} -2A = 1 & \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \\ 2A - 2B = 0 & \Rightarrow B = -\frac{1}{2} \\ 2A + B - 2C = 0 & \Rightarrow C = -\frac{3}{4} \end{array}\right\} y_p = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

(b) $y'' + y' = x^2$, $b = 0$, $n = 2$

$\lambda^2 + \lambda = \lambda \cdot (\lambda + 1) \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1$

b ist eine einfache Nullstelle (einfache Resonanz)

Ansatz: $y_p = x \cdot (Ax^2+Bx+C) \Rightarrow (6Ax+2B)+(3Ax^2+2Bx+C) = x^2$,

Koeffizientenvergleich: $3A = 1$, $6A + 2B = 0$, $2B + C = 0$

$\Rightarrow A = \frac{1}{3}$, $B = -1$, $C = 2 \quad \Rightarrow \quad y_p = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x$

(c) $y'' + y' - 2y = x \cdot e^{3x}$, $b = 3$, $n = 1$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2 \Rightarrow$ keine Resonanz

Ansatz: $y_p = (Ax + B) \cdot e^{3x}$

Ableitungen: ${y_p}' = (3Ax + 3B + A) \cdot e^{3x}$, ${y_p}'' = (9Ax + 9B + 6A) \cdot e^{3x}$

Einsetzen: $(10Ax + 7A + 10B) \cdot e^{3x} = x \cdot e^{3x}$

Koeffizientenvergleich: $10A = 1$, $7A + 10B = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{10}$, $B = \frac{-7}{100}$

$\Rightarrow y_p = \left(\dfrac{1}{10}x - \dfrac{7}{100}\right) \cdot e^{3x}$

(d) $y'' + y' - 2y = x \cdot e^x$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $b = 1$ (einfache Resonanz)

Ansatz: $y_p = x(Ax + B) \cdot e^x$, $[\dots] \Rightarrow y_p = \left(\dfrac{1}{6}x^2 - \dfrac{1}{9}x\right) \cdot e^x$

(e) $y'' - 2y' + y = x \cdot e^x$, $b = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (zweifache Resonanz)

Ansatz: $y_p = \frac{1}{6}x^3 \cdot e^x$

14.4.6 Satz

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = (p_n(x) \cdot \cos(cx) + q_n(x) \cdot \sin(cx)) \cdot e^{bx}$$

wobei p_n und q_n Polynome vom Grade $\leq n$ sind und $c \neq 0$. Dann gibt es Polynome r_n und s_n vom Grade $\leq n$, so daß

(i) falls $b + ci$ nicht Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, die Funktion $y_p = (r_n(x) \cdot \cos(cx) + s_n(x) \cdot \sin(cx)) \cdot e^{bx}$

(ii) falls $b + ci$ einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, die Funktion $y_p = x \cdot (r_n(x) \cdot \cos(cx) + s_n(x) \cdot \sin(cx)) \cdot e^{bx}$

eine Lösung der Differentialgleichung ist.

Bemerkung: Im Falle (ii) spricht man von *einfacher Resonanz* (zweifache Resonanz kann hier nicht auftreten).

14.4.7 Satz: Superpositionsprinzip

Ist y_1 eine spezielle Lösung der Differentialgleichung $y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f_1(x)$ und y_2 eine spezielle Lösung der Differentialgleichung $y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f_2(x)$, so ist $y_1 + y_2$ eine spezielle Lösung der Differentialgleichung $f_1(x) + f_2(x)$.

14.4.8 Beispiel

$y'' + 2y' - 3y = \underbrace{e^x}_{f_1(x)} - \underbrace{x^2 + 4x - 5}_{f_2(x)}$

1. spezielle Lösung von $y'' + 2y' - 3y = e^x$: $y_1 = \frac{x}{4}e^x$ (nach 14.4.4)
2. spezielle Lösung von $y'' + 2y' - 3y = -x^2 + 4x - 5$: $y_2 = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{16}{9}x + \frac{7}{24}$
3. $\Rightarrow y_p = y_1 + y_2 = \frac{x}{4} \cdot e^x - \frac{1}{3}x^2 - \frac{16}{9}x + \frac{7}{24}$

14.4.9 Energiemethode

Zu lösen sei die Differentialgleichung $y'' = f(y)$.
Jede Lösung dieser Gleichung erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}(y')^2 = \int f(y)\, dy$$

die separabel und von erster Ordnung ist.

Beispiel: $y'' = 2y^3$ (keine lineare DGL!).
Anfangsbedingungen $y(-2) = 1,\ y'(-2) = -1$
Integration: $\frac{1}{2}(y'(x))^2 = \int 2y(x)^3\, dy = \frac{y(x)^4}{2} + C$
$x = -2$ einsetzen: $\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + C \Rightarrow C = 0$
$\frac{1}{2}(y')^2 = \frac{1}{2}y^4 \Rightarrow y' = \pm y^2$

Wegen $y'(-2) = -1$ ist $y' = -y^2$ (separable DGL).

$\frac{dy}{dx} = -y^2 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2}\, dy = -1\, dx$
Integration: $-\frac{1}{y} = -x + C_1$. Wegen $y(-2) = 1$ ist $C_1 = -3$
$\Rightarrow y = \frac{1}{x+3}$

14.5 Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{n-1} + \cdots + a_1(x) \cdot y^1 + a_0(x) = f(x) \tag{14.5}$$

bezeichnet man als lineare Differentialgleichung n–ter Ordnung. Ist $f = 0$, so heißt sie *homogen*, sonst *inhomogen*. f heißt*Störfunktion* oder *Störglied.* Sind die Funktionen a_j konstant, so spricht man von einer *linearen Differentialgleichung n–ter Ordnung mit konstanten Koeffizientzen.*

14.5.1 Satz

Ist Y_h die Menge aller Lösungen der homogenen Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_0 \cdot y = 0$$

und y_p eine spezielle Lösung der Gleichung (14.5), so ist

$$Y = \{y : y = y_h + y_p \text{ mit } y_n \in Y_h\}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Struktur der Lösung im homogenen Fall

14.5.2 Definition

Die Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ heißen *linear unabhängig*, wenn aus

$$c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + \cdots + c_n \cdot y_n(x) = 0 \qquad (x \in D)$$

$c_1 = \cdots = c_n = 0$ folgt. (D bezeichnet den gemeinsamen Definitionsbereich, $D \neq \emptyset$, offene Menge)

14.5.3 Satz

Sind die Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ $(n-1)$–mal differenzierbar und ist die *Wronski'sche Determinante*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ {y_1}'(x) & {y_2}'(x) & {y_3}'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ {y_1}^{(n-1)} & {y_2}^{(n-1)} & {y_3}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

in D überall ungleich 0, so sind die Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ linear unabhängig. $W(x)$ ist entweder überall gleich Null oder überall ungleich Null in D.

14.5.4 Beispiel

(a) Sind $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$, $f_4(x) = x^3$ $(D \in \mathbb{R})$ linear unabhängig?

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6x \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 = 12 \neq 0$$

$\Rightarrow$ linear unabhängig

(b) Die Funktionen $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ und $f_3(x) = 2x + 3$ sind linear abhängig, da $3 \cdot f_1(x) + 2 \cdot f_2(x) = f_3(x) = 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$.

Die Wronski'sche Determinante ist

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & 2x+3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

14.5.5 Satz

Die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung n–ter Ordnung kann in der Gestalt

$$y_h(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + \cdots + C_n \cdot y_n(x)$$

angegeben werden, wobei $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ linear unabhängige Lösungen und $C_1, \ldots, C_n$ beliebige Konstanten sind.

Lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

14.5.6 Definition: Charakteristische Gleichung

Die Gleichung

$$\lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{(n-1)} + \cdots + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0$$

heißt *charakteristische Gleichung der Differentialgleichung*

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0 \tag{14.6}$$

14.5.7 Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (14.6)

Eine r-fache reelle Lösung λ der charakteristischen Gleichung führt zu dem folgenden Beitrag in der allgemeine Lösung:

$$(C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + \cdots + C_{r-1}x^{r-1}) \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

Eine r–fache komplexe Nullstelle $\alpha \pm i\omega$ $(\omega \neq 0)$ führt zu dem folgenden Beitrag in der allgemeinen Lösung:

$$(P(x) \cdot \cos(\omega \cdot x) + Q(x) \cdot \sin(\omega \cdot x)) \cdot e^{\alpha \cdot x}$$

wobei $P(x) = C_0 + C_1 \cdot x + \cdots + C_{r-1} \cdot x^{r-1}$ und $Q(x) = D_0 + D_1 \cdot x + \cdots + D_{r-1} \cdot x^{r-1}$. Um die allgemeine Lösung zu erhalten, werden alle diese Beiträge addiert.

14.5.8 Beispiele

(a) $y''' - 4y'' - y' + 4y = 0$

char. Gleichung: $\lambda^4 - 4\lambda^2 - \lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 4$

Allgemeine Lösung: $y = A \cdot e^{-x} + B \cdot e^x + C \cdot e^{4x}$ (A, B, C beliebig)

(b) $y^{(4)} - 6y''' + 12y'' - 10y' + 3y = 0$

$\lambda^4 - 6\lambda^3 + 12\lambda^2 - 10\lambda + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2,3} = 1,\ \lambda_4 = 3$

Allgemeine Lösung: $y = (C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2) \cdot e^x + B \cdot e^x$

(c) $y^{(4)} + 3y'' - 4y = 0$

$\lambda^4 + 3\lambda^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_{3,4} = \pm 2i$

Allgemeine Lösung: $y = A \cdot e^{-x} + B \cdot e^{x} + C \cdot \cos(2x) + D \cdot \sin(2x)$ $(\alpha = 0,\ e^{\alpha} = 1)$

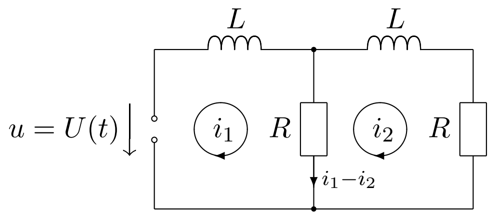
Lineare inhomogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f(x)$$

Lösungsansatz für eine spezielle Lösung in Abhängigkeit von f, ähnlich wie in (14.4.4) und (14.4.6), siehe Formelsammlungen.

14.6 Systeme linearer Differentialgleichungen

14.6.1 Beispiel



Zwei gleiche Widerstände, zwei gleiche Induktivitäten, Spannung $U = U(t)$ bekannt.

Maschenregel: In jeder Masche ist die Summe der Spannungen gleich 0.

$\circlearrowleft$ 1: $L \cdot \frac{di_1}{dt} + R \cdot (i_1 - i_2) - u = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{di_1}{dt} = \frac{R}{L} \cdot i_1 + \frac{R}{L} \cdot i_2 + \frac{u}{L}$

$\circlearrowleft$ 2: $L \cdot \frac{di_2}{dt} + R \cdot (i_1 - i_2) + R \cdot i_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{di_2}{dt} = \frac{R}{L} \cdot i_1 - \frac{2R}{L} \cdot i_2$

Beide Stromgrößen treten in beiden Gleichungen auf. Man spricht daher von miteinander *gekoppelten Differentialgleichungen*. Sind die Werte der beiden Ströme z.B. zur Zeit $t = 0$ vorgegeben (d.h. $i_1(0)$ und $i_2(0)$, so handelt es sich um ein *Anfangsproblem*.

14.6.2 Definition

Ein (explizites) *System von linearen Gleichungen erster Ordnung* für die Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ hat die Form:

$$\begin{aligned} {y_1}'(x) &= a_{11}(x) \cdot y_1(x) + \dots + a_{1n} \cdot y_n(x) + f_1(x) \\ {y_2}'(x) &= a_{21}(x) \cdot y_1(x) + \dots + a_{2n} \cdot y_n(x) + f_2(x) \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ {y_k}'(x) &= a_{k1}(x) \cdot y_1(x) + \dots + a_{kn} \cdot y_n(x) + f_k(x) \end{aligned}$$

Sind die Funktionen a_{ij} konstant, so spricht man von einem System mit *konstanten Koeffizienten*, sind die Funktionen f_j alle gleich 0, so heißt das System *homogen*.

Im Weiteren werden wir immer $k = n$ voraussetzen. Ein solches System läßt sich auch in *Matrizenform* schreiben als

$$y'(x) = A(x) \cdot y(x) + f(x)$$

wobei:

$$\begin{aligned} y(x) &= (y_1(x), \dots, y_n(x))^T \\ y'(x) &= ({y_1}'(x), \dots, {y_n}'(x))^T \\ f(x) &= (f_1(x), \dots, f_n(x))^T \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

Beispiel: Für das System aus (14.6.1)

$$\begin{aligned} y(t) &= (i_1(t), i_2(t))^T \\ y'(t) &= ({i_1}'(t), {i_2}'(t))^T \\ f(t) &= \left(\frac{U(t)}{L}, 0\right)^T \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 - 2 & \end{bmatrix}$$

14.6.3 Satz

Die allgemeine Lösung des Systems $y'(x) = A(x) \cdot y(x) + f(x)$ setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung y_h des homogenen Systems $y'(x) = A(x) \cdot y(x)$ und einer speziellen Lösung y_p des inhomogenen Systems.
Ist A eine Diagonalmatrix, so hat das System die Form:

$$\begin{aligned} {y_1}'(x) &= a_{11}(x) \cdot y_1(x) + f_1(x) \\ {y_2}'(x) &= a_{22}(x) \cdot y_2(x) + f_2(x) \\ &\vdots \\ {y_n}'(x) &= a_{nn}(x) \cdot y_n(x) + f_n(x) \end{aligned}$$

(sogenanntes *entkoppeltes System*) In diesem Fall können die Gleichungen unabhängig von einander gelöst werden. Einige Systeme lassen sich entkoppeln.

14.6.4 Satz

Besitzt eine $n \times n$–Matrix A n linear unabhängige Eigenvektoren $r_1, \ldots, r_n$, dann ist die Matrix $T = [r_1, \ldots, r_n]$ invertierbar und $T^{-1} \cdot A \cdot T$ ist eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von A in der Hauptdiagonale:

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Bemerkung: (bereits bekannt aus erstem Semester)
Die Eigenwerte von A sind die Lösungen der Gleichung $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$ (die sogenannten charakteristischen Gleichungen). Die zugehörigen Eigenvektoren bestimmt man aus $(A - \lambda \cdot E) \cdot r = 0$ (lineares Gleichungssystem).

14.6.5 Beispiel

Gegeben sei $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

Eigenwerte: $\det(A - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 1 \\ 4 & (-1-\lambda) \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -2$$

Eigenvektoren: $(A - 3E) \cdot \begin{bmatrix} r_1^1 \\ r_1^2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow r_1 = (1,1)^T$

$$(A + 2E) \cdot \begin{bmatrix} r_2^1 \\ r_2^2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow r_1 = (1,-4)^T$$

$$\Rightarrow T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \qquad T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(3, -2)$$

14.6.6 Satz (Lösungsverfahren durch Diagonalisierung)

Gegeben sei das homogene System von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten $y'(x) = A \cdot y(x)$. Nehmen wir an, daß die Matrix A n linear unabhängige Eigenvektoren $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}^n$ mit den zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ besitzt und sei $T = [r_1, \ldots, r_n]$ und $u = T^{-1} \cdot y$. Dann erfüllt u die (entkoppelte) Gleichung

$$u' = T^{-1} \cdot A \cdot T \cdot u = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \cdot u$$

welche

$$u_h = C_1 e^{\lambda_1 x} \cdot (1, 0, \ldots, 0)^T + C_2 e^{\lambda_2 x} \cdot (0, 1, \ldots, 0)^T + \cdots + C_n e^{\lambda_n x} \cdot (0, 0, \ldots, 1)^T$$

als allgemeine Lösung besitzt. Die allgemeine Lösung des ursprünglichen Systems lautet:

$$y_h = T \cdot u_h = C_1 \cdot r_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + \cdots + C_n \cdot r_n \cdot e^{\lambda_n \cdot x} \qquad (C_1, \ldots, C_2 \in \mathbb{R})$$

Beweis: $y' = A \cdot y, \quad u = T^{-1} \cdot y$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = T \cdot u \\ y' = T \cdot u' \end{array}\right\} T \cdot u' = A \cdot T \cdot u \qquad | \cdot T$$

$$u' = \underbrace{T^{-1} \cdot A \cdot T}_{=\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)} \cdot u$$

14.6.7 Beispiel

Zu lösen: ${y_1}' = -y_1 + y_2$, ${y_2}' = y_1 - y_2$, d.h. $y' = A \cdot y = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot y$

Eigenwerte und Eigenvektoren:

$\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$

$r_1 = (1, -1)^T$, $r_2 = (1, 1)^T$ (linear unabhängig)

Lösung des entkoppelten Systems:

$u_h = C_1 \cdot e^{-2x} \cdot (1, 0)^T + C_2 \cdot e^0 \cdot (0, 1)^T = (C_1 \cdot e^{-2x}, C_2)^T$

mit C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$, beliebig

Lösung des ursprünglichen Systems:

$$y_h = T \cdot u_h = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \cdot e^{2x} \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \\ -C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

14.6.8 Satz (Lösungsverfahren mit *Exponentialansatz*)

Gegeben sei das homogene System von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten $y'(x) = A \cdot y(x)$. Dann gilt: Die allgemeine Lösung y_h ergibt sich als Linearkombination des Exponentialansätze.

$$\begin{bmatrix} C_{1,0} + C_{1,1} \cdot x + \cdots + C_{1,k-1} \cdot x^{k_j - 1} \\ C_{2,0} + C_{2,1} \cdot x + \cdots + C_{2,k-1} \cdot x^{k_j - 1} \\ \vdots \\ C_{n,0} + C_{n,1} \cdot x + \cdots + C_{n,k-1} \cdot x^{k_j - 1} \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda_j \cdot x}$$

Wobei λ_j die Eigenwerte von A mit der Vielfachheit k_j bedeuten.

Bemerkungen

(a) Die Konstanten in dem Ansatz werden durch Einsetzen in die Gleichung $y' = A \cdot y$ bestimmt.

(b) Falls Eigenwerte komplex sind, so erhält man auch komplexe Lösungsfunktionen y_j. Durch Aufspaltung in Real– und Imaginärteil ergeben sich dann die zugehörigen Lösungsfunktionen ($e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + \sin y)$).

(c) Der Fall $n = 2$

$y_1{}' = a_{11} \cdot y_1 + a_{12} \cdot y_2 \qquad (a_{12} \neq 0)$

$y_2{}' = a_{21} \cdot y_2 + a_{22} \cdot y_2$

Man macht zuerst den Exponentialansatz für y_1 (d.h. die erste Komponente des Lösungsvektors). Dieser Ansatz wird dann in die erste Gleichung eingesetzt und diese Gleichung nach y_2 aufgelöst:

$$y_2 = \frac{1}{a_{12}} \cdot (y_1{}' - a_{11} \cdot y_1) \tag{14.7}$$

(1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, reell. Ansatz für y_1:

$$y_1 = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}$$

(2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$, reell. Ansatz für y_1:

$$y_1 = (C_1 + C_2 \cdot x) \cdot e^{\alpha \cdot x}$$

(3) $\lambda_{1/2} = \alpha \pm i\omega$, konjugiert komplex. Ansatz:

$$y_1 = (C_1 \cdot \sin(\omega \cdot x) + C_2 \cdot \cos(\omega \cdot x)) \cdot e^{\alpha \cdot x}$$

14.6.9 Beispiele

(a) $y_1{}' = y_1 + y_2, \quad y_2{}' = -y_1 + y_2 \quad \Rightarrow y' = \begin{bmatrix} y_1{}' \\ y_2{}' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

Eigenvektoren von A: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 = (1-\lambda)^2 + 1, \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm i$

Ansatz: $y_1 = (C_1 \cdot \sin(\omega \cdot x) + C_2 \cdot \cos(\omega \cdot x)) \cdot e^{\alpha \cdot x}$

In (14.7) einsetzen:

$y_2 = e^x \cdot (C_1 \cdot \cos x - C_2 \cdot \sin x)$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung:

$y_1 = e^x \cdot (C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x)$

$y_2 = e^x \cdot (C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x)$

(b) $y_1{}' = 4 \cdot y_1 - 3 \cdot y_2 \qquad$ Anfangswerte: $y_1(0) = 1$

$y_2{}' = 3 \cdot y_1 - 2 \cdot y_2 \qquad y_2(0) = 0$

Eigenwerte: $\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 = (\lambda - 1)^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$ (zweif. NST)

Ansatz: $y_1 = (C_1 + C_2 \cdot x) \cdot e^x$ in (14.7) einsetzen:

$$y_2 = (C_1 - \tfrac{1}{3}C_2 + C_2 \cdot x) \cdot e^x$$

Anfangswerte: $y_1(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 1$

$$y_2(0) = 0 \Rightarrow C_1 - \tfrac{1}{3}C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 3$$

$$\Rightarrow y_1 = (1 + 3 \cdot x) \cdot e^x \qquad \text{und} \qquad y_2 = 3 \cdot x \cdot e^x$$

14.6.10 Bestimmung einer speziellen Lösung der Gleichung $y'(x) = A \cdot y(x) + f(x)$

Wir wissen bereits: Die allgemeine Lösung setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung y_h des homogenen Systems $y'(x) = A \cdot y(x)$ und einer beliebigen speziellen Lösung y_p des inhomogenen Systems.

(a) Lösungsansatz in Abhängigkeit von f

Ähnlich wie in (14.4.4) und (14.4.6), siehe auch Formelsammlungen. Zu beachten ist jedoch: Beim Lösungsansatz sind in **allen** Komponenten jeweils **alle** Komponenten des Störgliedes zu berücksichtigen.

Erläuterung an einem Beispiel:

$y_1{}' = -y_1 + 3 \cdot y_2 + x$
$y_2{}' = 2 \cdot y_1 - 2 \cdot y_2 + e^{-x}$

allg. Lösung des homogenen Systems:
$y_1 =_1 \cdot e^{-4x} + C_2 \cdot e^x$
$y_2 = -C_1 \cdot e^{-4x} + \frac{2}{3}C_2 \cdot e^x$

Ansatz für eine spezielle Lösung:

$y_{1,p} = a \cdot x + b + c \cdot e^{-x}$
$y_{2,p} = A \cdot x + B + C \cdot e^{-x}$

einsetzen in das inhomogene System

$$\begin{aligned} a - c \cdot e^{-x} &= (-b + 3B) + (-a + 3A + 1) \cdot x + (-c + 3C) \cdot e^{-x} \\ A - C \cdot e^{-x} &= (2b - 2B) + (-2a - 2A) \cdot x + /2c - 2C + 1) \cdot e^{-x} \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} a &= -b + 3B \\ 0 &= -a + 3A + 1 \\ -c &= -c + 3C \\ &\ldots \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 6 Gleichungen, 6 Unbekannte

$y_{1,p} = -\frac{5}{8} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}e^{-x}$
$y_{2,p} = -\frac{3}{8} - \frac{1}{2}x$

Index