Mathematik III für Elektrotechniker – WS 04/05
Prof. Dr. Sasvári, TU Dresden
Mitschrift

Fabian Kurz
http://fkurz.net/

Zuletzt aktualisiert:
8. Februar 2005

Inhaltsverzeichnis

14.6.11 Satz . . . 2
14.6.12 Beispiel . . . 2
14.6.13 Systeme höherer Ordnung . . . 2
14.7 Numerische Verfahren für Anfangswertprobleme . . . 3
14.7.1 Die Eulersche Polynomzugmethode . . . 3
14.7.2 Beispiel . . . 4
14.7.3 Das Halbschrittverfahren . . . 4
14.7.4 Das Euler–Verfahren für DGL–Systeme . . . 4
14.7.5 Beispiel . . . 5

15 Funktionentheorie **6**
15.1 Die komplexen Zahlen (Wiederholung) . . . 6
15.2 Stetige Funktionen . . . 7
15.2.1 Definition . . . 7
15.2.2 Satz . . . 8
15.2.3 Definition . . . 8
15.3 Differenzierbarkeit . . . 8
15.3.1 Definition . . . 8
15.3.2 Beispiele . . . 8
15.3.3 Satz (Kettenregel) . . . 9
15.3.4 Ableitung der Umkehrfunktion . . . 9
15.3.5 Satz . . . 9
15.3.6 Die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen . . . 9
15.4 Potenzreihen . . . 10
15.4.1 Definition . . . 10
15.4.2 Beispiel . . . 10
15.4.3 Definition: Potenzreihe . . . 10
15.4.4 Satz . . . 11
15.4.5 Beispiele . . . 11
15.5 Elementare Funktionen . . . 11
15.5.1 Satz . . . 13
15.6 Kurvenintegrale . . . 13
15.6.1 Satz . . . 15
15.6.2 Zwischensummen . . . 15
15.6.3 Satz . . . 15
15.6.4 Beispiele . . . 15
15.6.5 Eigenschaften des Integrals . . . 16
15.6.6 Definition: Stammfunktion . . . 16
15.6.7 Satz . . . 16
15.6.8 Beispiel . . . 17
15.6.9 Satz: Der Cauchysche Integralsatz . . . 17
15.6.10 Definition . . . 17

15.6.11 Satz: Der Cauchysche Integralsatz für mehrfach zush. Gebiete 17
15.6.12 Beispiel 18
15.7 Die Cauchyschen Integralformeln 18
15.7.1 Satz: Cauchysche Integralformel 18
15.7.2 Bemerkungen: 18
15.7.3 Beispiele 19
15.7.4 Satz: Cachyscher Integralsatz für die n-te Ableitung 19
15.7.5 Beispiele 19
15.8 Potenzreihenentwicklung 20
15.8.1 Satz 20
15.8.2 Beispiele 20
15.8.3 Satz 21
15.8.4 Definition 21
15.8.5 Satz 21
15.8.6 Beispiele 21
15.8.7 Satz 22
15.9 Isolierte Singularitäten, Laurent-Entwicklung 22
15.9.1 Satz 22
15.9.2 Beispiel 22
15.9.3 Definition 23
15.9.4 Beispiele 23
15.9.5 Satz 24
15.9.6 Beispiele 24
15.9.7 Satz 24
15.10 Residuensatz und Anwendung 24
15.10.1 Definition 25
15.10.2 Beispiele 25
15.10.3 Satz 25
15.10.4 Beispiele 25
15.10.5 Satz (Risiduensatz) 25
15.10.6 Beispiele 26
15.10.7 Anwendung: Berechnung von reellen uneigentlichen Integralen 26
15.10.8 Beispiel 26
15.10.9 Satz 27
15.10.10 Beispiel 27
15.11 Konforme Abbildungen 28
15.11.1 Einführung 28
15.11.2 Satz zur Winkeltreue 28
15.11.3 Bemerkung 28
15.11.4 Definition: Konforme Abbildung 28
15.11.5 Satz (Riemannscher Abbildungssatz) 29
15.11.6 Gebrochen lineare Abbildungen 29
15.11.7 Die Riemannsche Zahlenkugel 29
15.11.8 Möbiustransformation 30
15.12 Anwendungen 32
15.12.1 Ebene stationäre Strömungen 32
15.12.2 Satz 32
15.12.3 Das komplexe Strömungspotential 33

Wiederholung

Systeme von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit *konstanten Koeffizienten.*

$$y'(x) = A \cdot y(x) + f(x)$$

mit

$$\begin{array}{l} y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))^T \\ y'(x) = (y_1'(x), \ldots, y_n'(x))^T \\ f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))^T \end{array} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Allgemeine Lösung: $y = y_h + y_p$

y_h: allgemeine Lösung des homogenen Systems

$$y'(x) = A \cdot y(x)$$

y_p: eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems

$$y'(x) = A \cdot y(x) + f(x)$$

allgemeine Lösung des homogenen Systems: 2 Verfahren behandelt

a) Diagonalisierung

b) Exponentialansatz

spezielle Lösung des inhomogenen Systems:

a) Ansatz in Abhängigkeit von f

b) *Variation der Konstanten* (Neu!)

14.6.11 Satz

Gegeben sei das inhomogene System $y'(x) = A \cdot y(x) + f(x)$ und sei

$$C_1 \cdot y_1(x) + \cdots + C_n \cdot y_n(x)$$

die allgemeine Lösung des homogenen Systems $y'(x) = A \cdot y(x)$. $Y(x)$ bezeichne diejenige Matrix, deren Spalten die n Lösungsvektoren $y_1, \ldots, y_n$ sind. Der Ansatz $y_p(x) = Y(x) \cdot u(x)$ (mit $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_n(x))^T$) führt auf die Gleichung

$$u'(x) = Y^{-1}(x) \cdot f(x)$$

aus der man eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems erhalten kann.

14.6.12 Beispiel

$$\left.\begin{array}{rcr} y_1' & = & -y_1 + y_2 + e^x \\ y_2' & = & y_1 - y_2 + e^x \end{array}\right\} \Longrightarrow y' = A \cdot y + f = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot y + \begin{bmatrix} e^x \\ e^x \end{bmatrix}$$

Eigenwerte von A und zugehörige Eigenvektoren:

$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 0$ $\qquad$ $[det(A - \lambda \cdot E) = 0]$

$r_1 = (1, -1)^T,\ r_2 = (1, 1)^T$ $\qquad$ (linear unabhängig)

$$\Rightarrow y_h = C_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = C_1 \cdot \begin{bmatrix} e^{-2x} \\ -e^{-2x} \end{bmatrix} + C_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lösungsvektoren in Matrix $Y(x)$ zusammenfassen:

$$Y(x) = \begin{bmatrix} e^{-2x} & 1 \\ -e^{-2x} & 1 \end{bmatrix}, \quad Y^{-1}(x) = \frac{e^{2x}}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ e^{-2x} & e^{-2x} \end{bmatrix}$$

$$u'(x) = Y^{-1}(x) \cdot f(x) = \frac{e^{2x}}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ e^{-2x} & e^{-2x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^x \\ e^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^x \end{bmatrix}$$

$$u'(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^x \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad u(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^x \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad y_p = Y(x) \cdot u(x) = \begin{bmatrix} e^x \\ e^x \end{bmatrix}$$

Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems:

$$y = y_h + y_p = \begin{bmatrix} C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 + e^x \\ -C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 + e^x \end{bmatrix}$$

14.6.13 Systeme höherer Ordnung

Ein System expliziter linearer Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten läßt sich durch Einführung neuer unbekannter Funktionen auf ein System erster Ordnung überführen. Erläuterung an einem Beispiel:

$$y_1''(x) + y_1'(x) + y_1(x) - y_2(x) = x$$
$$y_2''(x) - y_2'(x) - y_1(x) + 2 \cdot y_2(x) = x^2$$

Wir führen die folgenden Funktionen ein

$$u_1 = y_1, \qquad u_2 = y_1', \qquad u_3 = y_2, \qquad u_4 = y_2'$$

und setzen diese oben ein. Es ergibt sich ein System erster Ordnung (aber mit vier Unbekannten).

$$\begin{aligned}
u_1'(x) &= u_2(x) \\
u_2'(x) &= -u_1(x) - u_2(x) + u_3(x) + x \\
u_3'(x) &= u_4(x) \\
u_4'(x) &= u_1(x) - 2 \cdot u_3(x) + u_4(x) + x^2
\end{aligned}$$

Oftmals ist es auch möglich, ein System höherer Ordnung durch Elimination der unbekannten Funktionen in eine einzige Differentialgleichung höherer Ordnung zu überführen, in der nur eine der Funktionen vorkommt.

Verfahren: Wie Gauß'sche Elimination + Differenzieren einer Gleichung als zusätzliche Umformung.

Beispiel: (Gleichungssystem wie oben)

(2) nach y_1 auflösen:

(2.1) $y_1(x) = y_2''(x) - y_2'(x) + 2y_2(x) - x^2$

zweimal ableiten:

(2.2) $y_1'(x) = y_2'''(x) - y_2''(x) + 2 \cdot y'(x) - 2x$

(2.3) $y_1''(x) = y_2^{(4)}(x) - y_2'''(x) + 2 \cdot y''(x) - 2$

(2.1) − (2.3) in (1) einsetzen:

$$y_2^{(4)} + 2y_2''(x) + y_2' + y_2(x) = x^2 + 3x + 2$$

lineare Differentialgleichung vierter Ordnung für y_2

14.7 Numerische Verfahren für Anfangswertprobleme

Viele Differentialgleichungen sind nicht formelmäßig lösbar, z.B. $y'(x) = x^2 + y^2(x)$

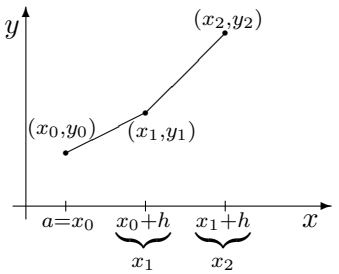
Numerische Verfahren: An gewissen sogenannten *Gitterpunkten* x_i werden Näherungswerte y_i für die exakten Werte $y(x_i)$ bestimmt. In diesem Abschnitt betrachten wir zuerst Anfangswertprobleme der Form:

$$y'(x) = f(x, y), \qquad x \in [a, b], \qquad y(x_0) = y_0$$

wobei $x_0 \in [a, b]$ und $y : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Als Gitterpunkte wählen wir eine *äquidistante* Einteilung des Intervalls $[a, b] : x_i = a + i \cdot h$, $i = 0, 1, \ldots, n$, mit der *Schrittweite* $h = \frac{b-a}{n}$

14.7.1 Die Eulersche Polynomzugmethode

- Gehe vom Anfangspunkt (x_0, y_0) aus geradlinig mit der dort gegebenen Steigung $f(x_0, y_0)$ um die Schrittweite h nach rechts.
- Von dem so erhaltenen Punkt (x_1, y_1) gehe mit der dort vorliegenden Steigung einen weiteren Schritt nach rechts
- usw.



Rekursionsvorschrift: n gegeben, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_0 = a$, $y_0 = y(x_0)$

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

14.7.2 Beispiel

$y'(x) = y(x) - \dfrac{2x}{y(x)}, \quad x \in [0,1], \quad y(0) = 1$ mit $h = 0{,}1$ (d.h. $n = 10$)

Man rechne mit 4 Dezimalstellen und vergleiche die Näherungswerte mit den Werten der exakten Lösung $y(x) = \sqrt{2x+1}$.

Rekursionsvorschrift, Ergebnis

$x_0 = 0$, $y_0 = 1$

$x_{i+1} = x_1 + 0{,}1$

$y_{i+1} = y_i + 0{,}1 \cdot \left(y_i - \frac{2x_i}{y_i}\right)$

$i = 0, 1, \ldots, 10$

i	x_i	y_i	$y(x_i)$
0	0,0	1,0000	1,0000
1	0,1	1,1000	1,0954
2	0,2	1,1918	1,1832
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	1,0	1,7847	1,7320

14.7.3 Das Halbschrittverfahren

Ähnlich wie das Euler–Verfahren, i.A. aber genauer.

Verfahrensvorschrift im i–ten Schritt: gehe vom Punkt (x_i, y_i) aus mit der dort gegebenen Steigung $f(x_i, y_i)$ eine halbe Schrittweite $\frac{h}{2}$ nach rechts. Bestimme dort die Steigung $f(x_1 + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i))$ und gehe mit dieser Steigung von (x_i, y_i) aus einen Schritt mit voller Schrittweite nach rechts.

Rekursionsvorschrift: (n gegeben, $h = \frac{b-a}{n}$)

$x_0 = a$, $y_0 = y(x_0)$

$x_{i+1} = x_i + h$
$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i))$

Ein ähnliches aber noch schnelleres Verfahren ist das *Runge–Kutta–Verfahren*, das wir nicht behandeln (siehe Formelsammlung).

14.7.4 Das Euler–Verfahren für DGL–Systeme

Wir betrachten das Anfangswertproblem $\quad y'(x) = f(x, y), x \in [a, b]$

$$y(x_0) = y^{(0)}, \quad y = (y_1, \ldots, y_n)^T, \quad y' = (y_1', \ldots, y_n')^T, \quad y^{(0)} = y(x_0) = (y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(n)})^T$$

(Der Wertebereich von f liegt in $\mathbb{R}$).
Das Verfahren ist wie in (14.7.1). Wir schreiben jedoch die Nummer des Iterationsschrittes bei y als oberer Index.

Rekursionsvorschrift: (n gegeben, $h = \frac{b-a}{n}$)

$$x_0 = a, \quad x_{i+1} = x_i + h, \quad y^{(0)} = y(x_0), \quad y^{(i+1)} = y^x \neg(i) + h \cdot f(x_i, y^{(i)})$$

14.7.5 Beispiel

$u'(x) = v(x)$
$v'(x) = -\sin(u(x)), \qquad 0 \le x \le \pi$
$u(0) = 0, \quad v(0) = 1 \quad$ mit $h = \frac{\pi}{4}$, $n = 4$

Die Funktion f: $f(x, u, v) = (v, -\sin u)^T$

Bezeichnung: $y^{(i)} = (u_i, v_i)^T$

Rekursionsvorschrift: $x_0 = 0$, $y^{(0)} = (0, 1)^T = (u_0, v_0)^T$

$$x_{i+1} = x_i + h$$
$$y^{(i+1)} = y^{(i)} + \frac{\pi}{4} \cdot (v_i, -\sin(u_i))^T \qquad i = 0, \ldots, 4$$

Ergebnis

i	x_0	$u^{(i)}$	$v^{(i)}$
0	$0{,}00\,\pi$	0,0000	1,0000
1	$0{,}25\,\pi$	1,7854	1,0000
2	$0{,}50\,\pi$	1,5708	0,4446
3	$0{,}75\,\pi$	1,9200	−0,3407
4	$1{,}00\,\pi$	1,6524	−1,0788

Literatur zu Differentialgleichungen

- Fetzer / Fränkel: Mathematik, Band 2
- Papula: Mathematik für Ingenieure, Band 2
- Collatz: Differentialgleichungen

Kapitel 15

Funktionentheorie

Literatur: Bug, Haf, Wille: Funktionentheorie

15.1 Die komplexen Zahlen (Wiederholung)

$\mathbb{C}$**:** Menge der komplexen Zahlen

i**:** *imaginäres Element*, $i^2 = -1$

Ist $z = x + iy$, $(x, y \in \mathbb{R})$ eine komplexe Zahl (*algebraische Darstellung*), so nennt man x den *Realteil* und y den *Imaginärteil* von z. In Zeichen: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.
Es gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z+w) &= \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w \\ \operatorname{Im}(z+w) &= \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} w \end{aligned} \qquad \left.\begin{aligned} \operatorname{Re}(a \cdot z) &= a \cdot \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im}(a \cdot z) &= a \cdot \operatorname{Im} z \end{aligned}\right\} a \in \mathbb{R}$$

Geometrische Veranschulichung von $\mathbb{C}$: *komplexe Zahlenebene*, *Gaußsche Zahlenebene.*
Der Punkt (x, y) entspricht der komplexen Zahl $z = x + iy$.

Ist $z = x + iy \neq 0$, so ist $\dfrac{1}{z} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i \cdot \dfrac{y}{x^2+y^2}$.

Die Zahl $\overline{z} = x - iy$ heißt die zu z *konjugierte* Zahl. Es gilt:

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \qquad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w} \qquad \overline{\overline{z}} = z$$

$$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 \qquad \operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

Die nichtnegative Zahl $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$ heißt der *Betrag* von z (Abstand des Punktes z vom Nullpunkt). Eigenschaften:

$$\begin{aligned} -|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z| \\ -|z| \leq \operatorname{Im} z \leq |z| \end{aligned} \qquad \begin{aligned} |z \cdot w| &= |z| \cdot |w| \\ |z + w| &\leq |z| + |w| \end{aligned}$$

Trigonometrische Darstellung für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$: $z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ wobei r und φ die Polarkoordinaten des Punktes (x, y) sind. ($z = x + iy$, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.)

Bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen multiplizieren sich die Beträge, die Argumente addieren sich.
Deshalb ist bei festem $w \neq 0$ die Abbildung $z \longrightarrow w \cdot z$ der komplexen Ebene auf sich eine Drehung um $\arg w$, verbunden mit einer Streckung um den Faktor $|w|$, kurz eine *Drehstreckung.*
Zum Beispiel: Die Multiplikation mit i ist eine Drehung um $90°$.

15.2 Stetige Funktionen

In diesem Kapitel untersuchen wir hauptsächlich Funktionen

$$f : D_f \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{wobei} \quad D_f \subset \mathbb{C}$$

(Sowohl Wertebereich als auch Definitionsbereich ist komplex.) Mit $g(z) = \operatorname{Re} f(z)$ und $h(z) = \operatorname{Im} f(z)$ gilt: $f(z) = g(z) + i \cdot h(z)$ wobei g und h reellwertige Funktionen auf D_f sind.
Betrachten wir $z = x + iy$ als einen Punkt der komplexen Zahlenebene, so kann man g und auch h als reellwertige Funktionen von zwei reellen Variablen betrachten.

Beispiele

(i) Konstante Funktion $f(z) = c$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit einer $c \in \mathbb{C}$

(ii) $f(z) = \overline{z}$, Spiegelung an der reellen Achse

(iii) $f(z) = a \cdot z$, $(a \neq 0)$, Drehstreckung

(iv) $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, reellwertige Funktionen auf $\mathbb{C}$

(v) $P(z) = a_n \cdot z^n + \cdots + a_1 \cdot z + a_0$, $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, *Polynom n–ten Grades*

(vi) $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, wobei P und Q Polynome sind (Q nicht identisch 0): rationale Funktion

Der *Graph einer Funktion* ist die Menge $\{(z, f(z)) : z \in D_f\}$ die als Teilmenge von $\mathbb{R}^4$ betrachtet werden kann, er entzieht sich damit der Anschauung.
Eine Möglichkeit der Darstellung von f ist die Zeichnung der Niveaulinien von $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $|f|$.

Beispiel: $f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = \underbrace{(x^2 - y^2)}_{\operatorname{Re} f} + i \underbrace{(2xy)}_{\operatorname{Im} f}$

$$\left.\begin{aligned} x^2 - y^2 &= c \quad \in \mathbb{R} \\ 2xy &= c \quad \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \text{Niveaulinien}$$

$|f(z)| = |z^2| = c \geq 0 \quad \Rightarrow$ Kreise

Da wir $\mathbb{C}$ auch als Ebene betrachten können, können wir die folgenden Begriffe aus $\mathbb{R}^2$ übernehmen: offene Menge (häufig *Bereich* genannt), abgeschlossene Menge, Rand einer Menge.

Konvergenz einer Folge von komplexen Zahlen

Eine Folge $\{z_n\}_1^\infty = \{x_n + i \cdot y_n\}_1^\infty$ komplexer Zahlen *konvergiert gegen* $z = x + iy$, wenn

$$\left[\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y\right] \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$$

15.2.1 Definition

Eine Funktion f heißt *stetig* im Punkt $z \in D_f$ wenn aus $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ folgt, daß $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = f(z)$.
Ist f stetig in jedem Punkt einer Menge U, so sagen wir, daß f *auf* U *stetig ist.*

Bemerkung: f ist genau dann stetig auf U, wenn dort $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ stetig sind.

Die Funktionen im obigen Beispiel sind alle stetig auf ihrem Definitionsbereich.

15.2.2 Satz

Ist die Funktion f auf der beschränkten, abgeschlossenen Menge K stetig, so nehmen die Funktionen $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ und $|f|$ auf K ihr Minimum und Maximum an. Insbesondere sind all diese Funktionen beschränkt auf K.

15.2.3 Definition

Es sei $M \subset \mathbb{C}$. Ein *Weg* (*Kurve*) *in* M ist eine stetige Abbildung γ eines Intervalls $[a, b] \subset \mathbb{R}$ in M. $\gamma(a)$ heißt *Anfangspunkt*, $\gamma(b)$ heißt Endpunkt von γ.

Man sagt auch: γ *verbindet* $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$. Zwei Punkte in M heißen *Verbindbar*, wenn es einen Weg in M gibt, der sie verbindet.

Die Menge M heißt (wegweise) *zusammenhängend*, wenn je zwei Punkte von M miteinander verbindbar sind. Eine zusammenhängende, offene Menge wird auch *Gebiet* genannt.

Beispiele für Wege

(a) $\gamma(t) = (1-t) \cdot z_1 + t \cdot z_2$, $t \in [0, 1]$ (Gerade)

(b) $\gamma(t) = z_0 + r \cdot (\cos t + i \cdot \sin t) = z_0 + r \cdot e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ (*Kreislinie* um z_0 mit r)
$\Rightarrow x = x_0 + r \cdot \cos t$, $y = y_0 + r \cdot \sin t$

Beispiele für Gebiete

(a) $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ Kreisscheibe (ohne Rand) vom Radius r, Mittelpunkt z_0

(b) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ obere Halbebene

(c) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ rechte Halbebene

15.3 Differenzierbarkeit

15.3.1 Definition

Es sei f eine auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ definierte komplexe Funktion und $z_0 \in U$.
Die Funktion f heißt in z_0 (komplex) *differenzierbar*, wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt *Ableitung* von f an der Stelle z_0. **Schreibweise:** $f'(z_0)$.
Die Funktion $f' : D_{f'} \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt die (erste) *Ableitungsfunktion* von f, wobei $D_{f'} = \{z \in D_f : f'(z) \text{ existiert}\}$.

Bemerkung: Es gilt: $f'(z_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$ (h anstelle von $z - z_0$ in der obigen Definition.)
Ist f in jedem Punkt von U differenzierbar, so heißt f *holomorph* auf U.

15.3.2 Beispiele

(a) $f(z) = z^3$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{(z_0 + h)^3 - {z_0}^3}{h} = \frac{3{z_0}^3 h + 3z_0 h^2 + h^3}{h}$$

$$3{z_0}^3 + 3z_0 h + h^2 \xrightarrow{h \to \infty} 3{z_0}^2 \quad (\forall z_0 \in \mathbb{C})$$

(b) Die Funktion $f(z) = \overline{z}$ ist in **keinem** Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ differenzierbar.

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{\overline{z_0+h}-\overline{z_0}}{h} = \frac{\overline{h}}{h}$$

Der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\overline{h}}{h}$ existiert aber nicht: liegt h auf der reellen Achse, so ist $\frac{\overline{h}}{h} = 1$, liegt h auf der imaginären Achse so ist $\frac{\overline{h}}{h} = \frac{-h}{h} = -1$.

Bemerkung: $\left.\begin{array}{l} g(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy) = \quad x \\ h(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy) = -y \end{array}\right\}$ beliebig oft partiell differenzierbar

15.3.3 Satz (Kettenregel)

Es seien $f : U \longrightarrow V$, $g : V \longrightarrow \mathbb{C}$ differenzierbare Funktionen auf den offenen Mengen U und V. Dann ist die zusammengesetzte Funktion $F = g(h)$ auf U differenzierbar und es gilt:

$$F'(z) = f'(z) \cdot g'(f(z))$$

15.3.4 Ableitung der Umkehrfunktion

Es sei f eine holomorphe Funktion auf der offenen Menge U. Ist $z_0 \in U$ und $f(z_0) \neq 0$, so gibt es eine Umgebung $U_0 \subset U$ von z_0 mit der folgenden Eigenschaft: Auf U_0 ist die Funktion *invertierbar*, die Umkehrfunktion f^{-1} ist holomorph auf $f(U_0)$ (der Wertebereich von f auf U_0) und es gilt:

$$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}$$

Beispiel: $f(z) = z^2$, $f'(z) = 2z \neq 0$ für $z \neq 0$

Der nächste Satz gilt *nicht* für reelle Funktionen

15.3.5 Satz

Ist eine Funktion auf einer offenen Menge differenzierbar, so ist sie dort **beliebig oft** differenzierbar.

15.3.6 Die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen

Eine Funktion $f(z) = f(x+iy) = g(x,y) + i\,h(x,y)$ auf einer offenen Menge U ist genau dann differenzierbar, wenn g und h auf U stetig partiell differenzierbar sind und $g_x = h_y$, $g_y = -h_x$. Ist f diffbar, so gilt:

$$f'(z) = g_x + i \cdot h_x = h_y - i \cdot g_y$$

Beispiel: $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{(x^2-y^2)}_{g(x,y)} + i\,\underbrace{(2xy)}_{h(x,y)} \quad \Rightarrow \quad g_x = 2x = h_y,\ g_y = -2y = -h_x$

Wir leiten die erste Cauchy–Riemansche Differentialgleichung nach x, die zweite nach y ab.

$$\left.\begin{array}{l} g_{xx} = h_{yx} \\ g_{yy} = -h_{xy} = -h_{yx} \end{array}\right\} \Rightarrow g_{xx} + g_{yy} = 0$$

Analog sieht man: $h_{xx} + h_{yy} = 0$

Der Realanteil und der Imaginäranteil einer holomorphen Funktion erfüllen also die sogenannte *Laplace-Gleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Funktionen, die diese Gleichung erfüllen heißen *harmonisch*.

Beispiel: $x^2 - y^2$, $e^x \cdot \cos y$, $\log(x^2 + y^2)$

15.4 Potenzreihen

15.4.1 Definition

Gegeben sei eine Folge $\{a_n\}$, $a_n \in \mathbb{C}$.

$$s_n \overset{\text{Def.}}{=} a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Die Folge $\{s_n\}$ heißt die Folge der *Partialsummen* von $\{a_n\}$.
Diese Folge heißt die zu der Folge $\{a_n\}$ gehörende *unendliche Reihe*. Konvergiert $\{s_n\}$ gegen eine komplexe Zahl $s \in \mathbb{C}$, so sagen wir, die Reihe sei *konvergent* und besitze die *Summe* s.

Schreibweise: $s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$

Existiert der Grenzwert nicht, so heißt die Reihe *divergent*. Eine Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Absolute Konvergenz zieht Konvergenz nach sich. Da $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ eine Reihe reeller Zahlen ist, hat man für absolute Konvergenz die üblichen Tests für reelle Reihen: Quotientenkriterium, Wurzelkriterium, Majoranten- und Minorantenkriterium.
Ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so ist $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

15.4.2 Beispiel

Die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ $(z \in \mathbb{C})$ ist für $|z| < 1$ absolut konvergent.

Für $|z| \geq 1$ ist $\{z^k\}_{k=1}^{\infty}$ keine Nullfolge, die geometrische Reihe divergiert dann.

Es gilt: $\sum\limits_{k=0}^{n} z^k = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$ $(n = 0, 1, \ldots)$

Für $|z| < 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$, also $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k = \dfrac{1}{1-z}$, $|z| < 1$.

15.4.3 Definition: Potenzreihe

Eine *Potenzreihe* ist eine unendliche Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = a_k \cdot (z - z_0)^k \quad \text{wobei} \quad a_k,\ z,\ z_0 \in \mathbb{C}$$

Der Punkt z_0 heißt *Entwicklungspunkt*.

Beispiel: Die geometrische Reihe (siehe oben), $a_k = 1$, $z_0 = 0$. Ihre Konvergenzmenge ist die offene Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
Die allgemeine Situation ist nicht wesentlich komplizierter:

15.4.4 Satz

Für jede Potenzreihe $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$ gibt es ein r mit $0 \leq r \leq \infty$, so daß die Potenzreihe für $|z - z_0| < r$ absolut konvergient, für $|z - z_0| > r$ divergent ist. Ist $r > 0$, so ist f auf

$$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

holomorph, ihre Ableitung berechnet sich durch *gliedweise Differentiation*:

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot k \cdot a_k \cdot (z - z_0)$$

Die Zahl r heißt *Konvergenzradius*, die Menge $D_r(z_0)$ *Konvergenzkreis* der Reihe. Über die Konvergenz auf dem Rande lassen sich keine allgemeinen Aussagen machen. r läßt sich wie in reellen Funktionen bestimmen:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{und} \quad r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{|a_n|}}$$

falls die Grenzwerte existieren.

15.4.5 Beispiele

Der Konvergenzradius der Potenzreihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot z^{n-1}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}^z$ ist gleich 1.
Für $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n \cdot z^n$ ist $r = 0$ für $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^n} \cdot z^n$ ist $r = \infty$.
Wir berechnen die Summe der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot z^{n-1}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot z^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)' = \left(\frac{1}{1-z} \right)' = \frac{1}{(z-1)^2}$$

Sei $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot z^n$. Dann gilt für $|z| < 1$:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Wie man hieraus f bestimmen kann, sehen wir im nächsten Abschnitt.

15.5 Elementare Funktionen

Bereits bekannt: $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$, $x \in \mathbb{R}$ (die Taylor-Reihe der Funktion e^x).
Deshalb definieren wir die Exponentialfunktion auf $\mathbb{C}$ durch

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot z^n = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \cdots \qquad (z \in \mathbb{C})$$

Analog erweitern wir die trigonometrischen Funktionen auf $\mathbb{C}$:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot z^{2n} \qquad = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 + \cdots \qquad (z \in \mathbb{C})$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1} = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 + \cdots \qquad (z \in \mathbb{C})$$

Nach Satz (15.4.4) sind e^z, $\sin z$, $\cos z$ holomorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$. Aus der Definition folgt: $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$

Durch gliedweise Differentiation erhalten wir

$$(e^z)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot z^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \cdot z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \cdot \frac{1}{n!} \cdot z^n = e^z$$

Analog sehen wir, daß $(\cos z)' = -\sin z$ und $(\sin z)' = \cos z$.

Aus der Definition folgen die *Euler'schen Gleichungen*:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \qquad\qquad e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \qquad\qquad \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

Man kann zeigen, daß $e^{z+t} = e^z \cdot e^t$ $(t, t \in \mathbb{C})$. Hieraus und aus den Euler'schen Gleichungen folgt:

$$\sin(z+t) = \sin z \cdot \cos t + \cos z \cdot \sin t \qquad\qquad \cos(z+t) = \cos z \cdot \cos t - \sin z \cdot \sin t$$

Die 1. Gleichung mit $t = \frac{\pi}{2}$: $\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos z$
Die 2. Gleichung mit $t = -z$: $1 = \cos^2 z + \sin^2 z$

Aus den Euler'schen Gleichungen erhalten wir:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y) = r \cdot (\cos y + i \sin y)$$

(die trigonometrische Darstellung von e^z), wobei $r = |e^z|$, $y = \varphi + 2l\pi i$ mit einer ganzen Zahl l.

$$e^{2k\pi i} = 1, \; e^{z+2k\pi i} = e^z \; (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Die komplexe Exponentialfunktion hat also die Periode $2\pi i$ (und auch die ganzzahligen Vielfachen von $2\pi i$). Andere Perioden gibt es nicht. Die Funktion e^z hat keine Nullstellen, da $e^z \cdot e^{-z} = e^0 = 1 \neq 0 \Rightarrow e^z \neq 0$.

Die Funktionen $\cos z$ und $\sin z$ haben nur reelle Nullstellen. Sie haben die Periode $2k\pi$, $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, andere Perioden gibt es nicht.

Die reellen Funktionen Tangens und Cotangens lassen sich zu holomorphen Funktionen fortsetzen durch die Definitionen:

$$\left.\begin{aligned} \tan z &= \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \neq (k + \tfrac{1}{2}) \cdot \pi \\ \cot z &= \frac{\cos z}{\sin z}, \quad z \neq k \cdot \pi \end{aligned}\right\} k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Es gilt:

$$\tan z = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} \quad \text{und} \quad \cot z = i \cdot \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = i \cdot \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}$$

Auch die Hyperbelfunktionen lassen sich auf natürliche Weise zu holomorphen Funktionen fortsetzen:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Aus den Euler'schen Formeln folgt:

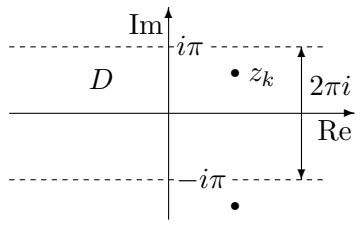
$$\sinh z = \frac{1}{i}\sin iz \qquad\qquad \cosh z = \cos iz$$
$$\sin z = \frac{1}{i}\sinh iz \qquad\qquad \cos z = \cosh iz$$

Die Logarithmusfunktionen

Auf der reellen Achse ist die exponentielle Funktion streng monoton wachsend und deshalb invertierbar. Die Inverse haben wir mit log oder ln bezeichnet.
Im komplexen Bereich ist die Situation anders. Die Funktion e^z bildet $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ab, jede komplexe Zahl $w \neq 0$ wird dabei an unendlich vielen Stellen als Wert angenommen.

Beweis: Sei $w = r \cdot e^{i\varphi}$ ($r = |w| \neq 0$, $\varphi = \arg w$, $0 \leq \varphi < 2\pi$) die exponentielle Darstellung von w. Für $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ sei $z_k = \log r + i(\varphi + 2k\pi)$.

Dann gilt $e^{z_k} = e^{\log r + i(\varphi + 2k\pi)} = e^{\log r} \cdot e^{i(\varphi+2k\pi)} = r \cdot e^{i\varphi} \cdot 1 = w$ von den unendlich vielen Zahlen z_k liegt genau eine in dem Streifen $D = \{z = x + iy : -\infty < x < \infty, -\pi \leq y < \pi\}$, nämlich



$$\log r + i\varphi, \text{ wenn } 0 \leq \varphi < \pi \qquad (k = 0)$$
$$\log r + i(\varphi - 2\pi), \text{ wenn } \pi \leq \varphi < 2\pi \qquad (k = -1)$$

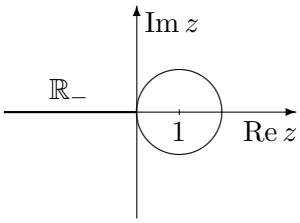
Die Einschränkung von e^z auf D ist eine ein-eindeutige Abbildung von D auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Die inverse Funktion nennen wir *Logarithmus* (auch *Hauptzweig* des Logarithmus genannt), und bezeichnen sie auch mit $\log z$ oder $\ln z$.

Bezeichnung: $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$ (nichtpositive reelle Zahlen).
(Im nächsten Satz betrachten wir $\mathbb{R}_-$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$)

15.5.1 Satz

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|1 - z| < 1$ gilt:

$$\log z = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}(z-1)^n$$



$\log z$ ist differenzierbar auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ und $(\log z)' = \frac{1}{z}$.
In den Punkten von $\mathbb{R}_- \setminus \{0\}$ ist $\log z$ nicht stetig.

15.6 Kurvenintegrale

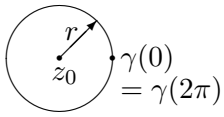
Zur Erinnerung: Ein Weg in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ ist eine stetige Abbildung γ eines Intervalls $[a, b] \in \mathbb{R}$ in U. γ läßt sich schreiben als

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

wobei x und y stetige, reelle Funktionen sind. Sind sie stückweise stetig differenzierbar, so heißt auch γ *stückweise stetig differenzierbar*, oder etwas kürzer: ein *Integrationsweg.*
Ist $\gamma(a) = \gamma(b)$ so heißt der Weg (oder die Kurve) *geschlossen.* Ist γ geschlossen und $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ für $a \leq t_1 < t_2 < b$, so heißt γ *einfach geschlossen.* Die Ableitung γ' von γ ist definiert durch $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ für alle t, wo x und y differenzierbar sind. Für die endlich vielen Werte, wo x oder y nicht differenzierbar sind setzen wir $\gamma'(t) = 0$ (nur damit γ' überall definiert ist).

Beispiele:

(a) $z_0 = x_0 + i \cdot y_0 \in \mathbb{C},\ r > 0$
$\gamma(t) = z_0 + r \cdot e^{it},\ t = [0,\, 2\pi]$
Dann ist γ einfach geschlossen und stetig differenzierbar.



$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \frac{d}{dt}\left[z_0 + r \cdot (\cos t + i \sin t)\right] = \frac{d}{dt}[(x_0 + r \cdot \cos t) + i(y_0 + r \cdot \sin t)] \\ &= -r \cdot \sin t + i \cdot r \cdot \cos t = i \cdot r \cdot (\cos t + i \cdot \sin t) \\ &= i \cdot r \cdot e^{it}\end{aligned}$$

(b) Für $z_0,\, z_1 \in \mathbb{C}$ ist $\gamma(t) = z_0 + t \cdot (z_1 - z_0),\ t \in [0,\, 1]$ die Verbindungsstrecke von z_0 nach z_1. γ ist stetig differenzierbar und $\gamma'(t) = z_1 - z_0$.

(c) Allgemeiner: Für $z_0,\, z_1,\, \ldots,\, z_n \in \mathbb{C}$ definieren wir $\gamma : [0,\, n] \to \mathbb{C}$ durch:

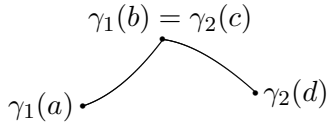
$$\gamma(t) = z_k + (t - k) \cdot (z_{k+1} - z_k),\ t \in [k,\, k+1]$$

Streckenzug von z_0 nach z_n. γ ist stückweise differenzierbar, geschlossen, wenn $z_0 = z_n$.
$\gamma'(t) = z_{k+1} - z_k,\ t \in [k, k+1]$

Zusammensetzen von Wegen

Hat man zwei Wege $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{C}$ derart, daß der Endpunkt $\gamma_1(b)$ von γ_1 mit dem Anfangspunkt $\gamma_2(c)$ von γ_2 übereinstimmt, so definiert man den aus γ_1 und γ_2 *zusammengesetzten Weg* $\gamma_1\gamma_2$ durch: $\gamma_1\gamma_2 : [a, b + (d - c)] \to \mathbb{C}$

$$\gamma_1\gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t + c - b) & t \in [b, b + (d - c)] \end{cases}$$



Weiterhin erklären wir zu jedem Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ den *entgegengesetzen Weg* $\gamma^{-1} : [a, b] \to \mathbb{C}$ durch $\gamma^{-1} = \gamma(a + b - t)$ (Anfangs– und Endpunkte werden vertauscht).

Im Falle von Beispiel (a) ist γ^{-1} die im Uhrzeigersinn durchlaufene Kreislinie, sie wird durch $\gamma^{-1}(t) = z_0 + r \cdot e^{-it}$ gegeben ($t \in [0, 2\pi],\ a = 0,\ b = 2\pi$).

Bereits bekannt: Die Länge eines Weges $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ ist

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

15.6.1 Satz

Das *Integral* einer auf $[a,b] \subset \mathbb{R}$ stückweise stetige, komplexwertigen Funktion f ist definiert durch

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t))\,dt + i \cdot \operatorname{Im}(f(t))\,dt$$

Die entsprechenden Eigenschaften reeller Integrale und der Hauptsatz der Differentialrechnung bleiben gültig: Ist $F : [a:b] \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion mit $F' = f$, so gilt:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

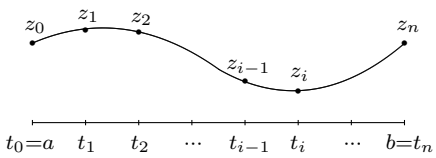
Beispiel: $\int_0^\pi e^{it}\,dt = \int_0^\pi \cos t\,dt + i\int_0^\pi \sin t\,dt = \sin t\Big|_0^\pi + i(-\cos t)\Big|_0^\pi = 2i$

oder: mit $F(t) = \frac{1}{i} \cdot e^{it}$ gilt: $F'(t) = e^{it} \quad \Rightarrow \quad \int_0^\pi e^{it}\,dt = F(\pi) - F(0) = \frac{1}{i}(-1-1) = 2i$

15.6.2 Zwischensummen

Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und f eine stetige Funktion auf γ. Wir wählen eine Zerlegung $Z = z(t_1, t_1, \ldots t_n)$ von $[a,b]$ in n Teilintervalle wobei $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ und setzen $z_i = \gamma(t_i)$.

Auf dem Kurvenstück von z_{i-1} nach z_i wählen wir einen beliebigen Punkt w_i $(i = 1, \ldots, n)$ und bilden die *Zwischensumme*



$$S(Z) = \sum_{k=1}^{n} f(w_k) \cdot (z_k - z_{k-1})$$

Mit $\Delta(Z)$ bezeichnen wir die maximale Länge der Teilkurven von Z (die *Feinheit* der Zerlegung).

15.6.3 Satz

Für eine beliebige stetige Funktion f existiert der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta(Z)\to 0} S(Z)$ den wir mit $\int_\gamma$ bezeichnen. Weiterhin gilt:

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt}$$

15.6.4 Beispiele

a) Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $\gamma(t) = z_0 + r \cdot e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ (positiv orientierte Kreise)

und $f(z) = \dfrac{1}{z - z_0}$

Dann ist $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\,dz = \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1}{z_0 + r \cdot e^{it} - z_0}}_{f(\gamma(t))} \cdot \underbrace{i \cdot r \cdot e^{it}}_{\gamma'(t)}\,dt = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i$

Bemerkung: Das Ergebnis ist unabhängig von r!

b) Ist $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und γ die Strecke von a nach $b : \gamma(t) = a + t \cdot (b-a)$, $t \in [0,1]$ so ist für eine beliebige stetige Funktion f

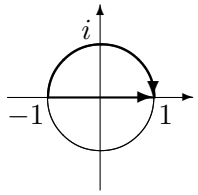
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\underbrace{a + t \cdot (b-a)}_{\text{Subst.}=x}) \cdot (b-a)\,dt = \int_a^b f(x)\,dt$$

$\left(\text{da } \frac{dx}{dt} = b-a,\ dt = \frac{1}{b-a} \cdot dx\right)$

c) $f(z) = |z|$

1. $\gamma(t) = e^{i(\pi - t)}, \quad t \in [0,\pi]$

$$\int_\gamma |z|\,dz = \int_0^\pi 1 \cdot \gamma'(t)\,dt = \gamma(\pi) - \gamma(0) = 2$$



2. Integration über die Strecke $[-1,1]$ (siehe b))

$$\int_{[-1,1]} |z|\,dz = \int_{-1}^1 |t|\,dt = 1$$

Dieses Beispiel zeigt, daß Kurvenintegrale i.A. nicht nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges abhängen.

15.6.5 Eigenschaften des Integrals

(i) $\int_\gamma c_1 \cdot f_1(z) + c_2 \cdot f_2(z)\,dz = c_1 \cdot \int_\gamma f_1(z)\,dz + c_2 \cdot \int_\gamma f_2(z)\,dz$

(ii) $\int_{\gamma^{-1}} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$, wobei γ^{-1} den entgegengesetzte Weg bezeichnet.

(iii) Sind $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ Integrationswege, die sich zu einem Weg γ zusammensetzen, so gilt:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz$$

(iv) $|\int_\gamma f(z)\,dz| \leq L(\gamma) \cdot \max_{z \in W_\gamma} |f(z)|$ wobei $L(\gamma)$ die Länge und W_γ den Wertebereich von γ bezeichnen.

15.6.6 Definition: Stammfunktion

Es sei f eine Funktion auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$. Eine Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ heißt *Stammfunktion*, wenn F holomorph ist und $F' = f$. Sind F und G Stammfunktionen von f, so ist $F - G$ konstant (folgt aus 15.3.3.v).

15.6.7 Satz

Es sei f eine stetige Funktion auf der offenen Menge U. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

(i) f besitzt eine Stammfunktion

(ii) Es gibt eine holomorphe Funktion F auf U mit $\int_\gamma f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0)$ für beliebige Punkte z_0, $z_1 \in U$ und für einen beliebigen Integrationsweg γ in U von z_0 nach z_1.

(iii) Für einen beliebigen geschlossenen Weg γ in U gilt: $\int\limits_\gamma f(z)\,dz = 0$

Folgerung: Besitzt f eine Stammfunktion F, so gilt mit einer $C \in \mathbb{C}$:

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(w)\,dw$$

wobei $z_0 \in U$ und $\int\limits_{z_0}^{z}$ bezeichnet das Integral über einen **beliebigen** Weg in U von z_0 nach z.

15.6.8 Beispiel

(a) $f(z) = z^n$ ($n \neq -1$, $U = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{C} \setminus \{0\}$). Stammfunktion: $F(z) = \frac{1}{n+1} \cdot z^{n+1}$.
Also gilt für einen beliebigen Integrationsweg in $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit Anfangspunkt z_0 und Enpunkt z_1:

$$\int\limits_\gamma z^n\,dz = \frac{1}{n+1}\left({z_1}^{n+1} - {z_0}^{n+1}\right)$$

(b) In (15.6.4) haben wir gesehen, daß $\int\limits_{|z|=r} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$.

Wegen des vorhergehenden Satzes kann die auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definierte Funktion $\frac{1}{z}$ **dort** keine Stammfunktion haben. $\ln z$ ist jedoch eine Stammfunktion auf $|z-1| < 1$

Zur Erinnerung: Eine offene Menge $D \subset \mathbb{C}$ heißt *einfach zusammenhängend*, wenn sich jeder Integrationsweg in D stetig innerhalb von D auf einen Punkt zusammenziehen läßt (keine „Löcher“ in D).

15.6.9 Satz: Der Cauchysche Integralsatz

Ist f eine holomorphe Funktion in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G, so gilt

$$\int\limits_\gamma f(z)\,dz = 0$$

für jeden geschlossen Integrationsweg γ in G. Folglich hat f eine Stammfunktion auf G.

15.6.10 Definition

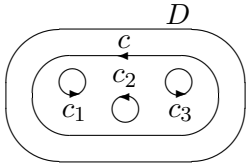
(nur anschaulich) Sei γ eine stetige, geschlossene und doppelpunktfreie Kurve auf $\mathbb{C}$. Durch γ wird die komplexe Ebene in ein beschränktes Gebiet, das *Innere von* γ und in ein unbeschränktes Gebiet zerlegt. Ein Integrationsweg heißt *positiv orientiert*, wenn beim Durchlaufen des Weges das Innere des Weges stets auf der linken Seite liegt.
Vereinbarung: Bei Integralen der Form $\int f(z)\,dz$ ist **immer** positive Orientierung gemeint.
$|z - z_0| = r$.

15.6.11 Satz: Der Cauchysche Integralsatz für mehrfach zusammenhängende Gebiete

Es seien c, c_1, …, c_n geschlossene, doppelpunktfreie und positiv orientierte Integrationswege in einem Gebiet D. Alle Kurven c_k sollen im Inneren der Kurve c liegen und jede Kurve c_k im

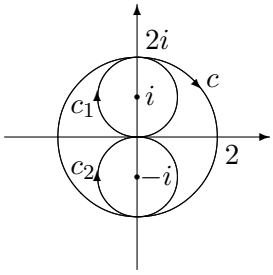
Äußeren jeder anderen Kurve c_j. Ferner liege das durch c und c_k gebildete Ringgebiet in D. Ist dann f eine holomorphe Funktion in D, so gilt:

$$\int\limits_c f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{c_n} f(z)\,dz$$



15.6.12 Beispiel

$$I = \int\limits_{|z|=2} \frac{1}{1+z^2}\,dz = \int\limits_{|z-i|=1} \frac{1}{1+z^2}\,dz + \int\limits_{|z+i|=1} \frac{1}{1+z^2}\,dz$$



Partialbruchzerlegung: $\dfrac{1}{1+z^2} = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{z-i} - \dfrac{1}{z+i}\right)$

Wir setzen diesen Ausdruck in die Integrale ein:

$$I = \frac{1}{2i} \int\limits_{|z-i|=1} \frac{1}{z-i}\,dz - \frac{1}{2i} \int\limits_{|z+i|=1} \frac{1}{z+i}\,dz$$

denn nach dem Cauchyschen Integralsatz ist $\int\limits_{|z-i|=1} \frac{1}{z-i}\,dz = \frac{1}{2i} \int\limits_{|z+i|=1} \frac{1}{z-i}\,dz = 0$.

Mit 15.6.4.a erhalten wir:

$$I = \frac{1}{2i} \cdot 2\pi i - \frac{1}{2i} \cdot 2\pi i = 0$$

15.7 Die Cauchyschen Integralformeln

15.7.1 Satz: Cauchysche Integralformel

Sei f in einem einfach zusammenhängenden Gebiet D holomorphe Funktion. Ferner sei γ ein in D verlaufender geschlossener, doppelpunktfreier, positiv orientierter Integrationsweg.
Dann gilt für jedes z aus dem Inneren von γ:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

15.7.2 Bemerkungen:

(a) Aus der Cauchyschen Integralformel folgt: Die Funktionswerte von f im Inneren der Kurve sind eindeutig durch die Funktionswerte entlang der Kurve bestimmt.

(b) Die Formel läßt sich in der Form

$$\int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = 2\pi i \cdot f(z)$$

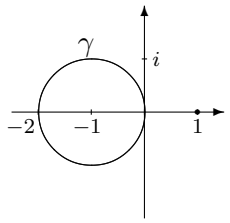
schreiben, die auch für die Berechnung von Integralen benutzt werden kann.

15.7.3 Beispiele

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin w}{w+i}\,dw$. Mit $z=-i$, $f(w)=\sin w$ ist f holomorph in $\mathbb{C}$ und es gilt

$$\int_{|w=2|} \frac{f(w)}{w+i}\,dw = 2\pi i\cdot\sin(-i) = 2\pi i\cdot(-i)\cdot\sinh 1 = 2\pi\sinh 1$$

(b) $\displaystyle\int_{|w+1|=1} \frac{1}{(w+1)(w-1)^3}\,dw$



Mit $z=-1$ und $f(w)=\frac{1}{(w-1)^3}$ ist f holomorph in $\mathbb{C}\setminus\{1\}=D_f$, der Integrationsweg verläuft in D_f und es gilt:

$$\int_{|w+1|=1} \frac{f(w)}{w+1}\,dw = 2\pi i\cdot f(-1) = 2\pi i\cdot\frac{1}{(-1-1)^3} = \frac{\pi i}{4}$$

Bemerkung: D_f ist zwar nicht zusammenhängend, aber der Integrationsweg verläuft im einfach zusammenhängenden Gebiet $|w+1|<2$ das in D_f liegt.

15.7.4 Satz: Cachyscher Integralsatz für die n-te Ableitung

Seien die Voraussetzungen von 15.7.1 erfüllt. Dann gilt für jedes $n=1,2,\ldots$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\cdot\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw$$

Bemerkung: Diese Formel läßt sich in der Form

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw = \frac{2\pi}{n!}\cdot f^{(n)}(z)$$

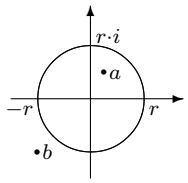
schreiben, die auch für die Berechnung von Integralen benutzt werden kann.

15.7.5 Beispiele

(a) $\displaystyle\int_\gamma \left(\frac{w}{w-1}\right)^2 dw = I$. Mit $f(w)=w^2$, $z=1$, $n=2$ ist f holomorph auf $\mathbb{C}$, $f^{(n)}(w)=6\cdot w$ und es gilt:

$$I = \frac{2\pi i}{2!}\cdot 6 = 6\pi i$$

(b) $\displaystyle I = \int_{|w|=r} \frac{1}{(w-a)^n\cdot(w-b)}\,dw$ wobei $|a|<r<|b|$ und $n\geq 1$.



Mit $f(w)=\frac{1}{w-b}$, $z=a$ ist f holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{b\}$ und

$$I = \frac{2\pi i}{(n-1)!}\cdot f^{(n-1)}(a)$$

$$
\begin{aligned}
f(w) &= (w-b)^{-1} \\
f'(w) &= (-1)\cdot(w-b)^{-2} \\
f''(w) &= (-1)\cdot(-2)\cdot(w-b)^{-3} \\
f'''(w) &= (-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(w-b)^{-4} \\
&\vdots \\
f^{(k)} &= (-1)\cdot(-2)\cdot\cdots\cdot(-k)\cdot(w-b)^{-k-1} = (-1)^k\cdot k!\cdot(w-b)^{-k-1}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow f^{(n-1)} = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot(w-b)^{-n}$$

$$I = \frac{2\pi i}{(n-1)!}\cdot(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot(a-b)^{-n} = -\frac{2\pi i}{(b-a)^n}\cdot(-1)^{n-1}$$

15.8 Potenzreihenentwicklung

15.8.1 Satz

Sei f eine im Gebiet D holomorphe Funktion. Dann läßt sich für f in jedem Punkt $z_0 \in D$ eine Taylor-Reihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\cdot(z-z_0)^k$$

entwickeln, die in jedem Kreisgebiet um z_0, das ganz in D liegt, konvergiert.

Bemerkung: Diese Darstellung von f ist **eindeutig** im folgenden Sinne: Gilt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\cdot(z-z_0)^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k\cdot(z-z_0)^k$ in einem Kreisgebiet um z_0, so ist $a_k = b_k$ für alle k.

15.8.2 Beispiele

(a) $f(z) = e^z$, $D_f = \mathbb{C}$, $z_0 = 0$. Dann ist $f^{(k)}(z) = e^z$, $f^{(k)}(0) = 1$ und

$$\boxed{e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\cdot z^k, \quad z \in \mathbb{C}}$$

(b) $\dfrac{1}{1-z} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k,\ |z| < 1$ geometrische Reihe, Taylor-Reihe in dem offenen Einheitskreis um 0

Allgemeiner: $f(z) = \dfrac{1}{a-z} = \dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{z}{a}} \qquad (a \neq 0)$

$f(z) = \dfrac{1}{a}\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{a}\right)^k = \dfrac{1}{a}\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{a^k}\cdot z^k$ für $|\frac{z}{a}| < 1 \Leftrightarrow |z| < |a|$

Will man $g(z) = \frac{1}{(z-a)^2}$ um 0 entwickeln, so beachte man

$$f'(z) = -g(z) \quad \Rightarrow \quad g(z) = -f'(z) = -\frac{1}{a}\cdot\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{a^k}\cdot z^k\right]' = -\frac{1}{a}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{a^k}\cdot z^{k-1}$$

(c) Rationale Funktionen zerlegt man in Partialbrüche, die wie in (b) behandelt werden. Zum Beispiel:

$$f(z) = \frac{-1}{(z-1)^2 \cdot (z-2)} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{z-2}$$

Folglich ist

$$f(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} z^k + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot z^{k-1}}_{\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)\cdot z^k} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2^{k+1}} \right) \cdot z^k$$

15.8.3 Satz

Die Funktionen f und g seien im Gebiet D holomorph. Ferner gelte in einem Punkt $z_0 \in D$: $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0),\ k = 0, 1, 2, \ldots$. Dann gilt $f(z) = g(z)$ für alle $z \in D$.

15.8.4 Definition

Die Funktion f sei holomorph in einer Umgebung U von z_0. Der Punkt z_0 heißt *Nullstelle der Ordnung* m von f falls eine in U holomorphe Funktion g existiert, so daß

$$f(z) = (z - z_0)^m \cdot g(z) \qquad \text{und} \qquad g(z_0) \neq 0.$$

15.8.5 Satz

Die Funktion f sei holomorph in einer Umgebung von z_0. Der Punkt z_0 ist eine Nullstelle der Ordnung m von f genau dann, wenn $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ und $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

Bemerkung: Aus diesem Satz folgt, daß die Taylorreihe von f um z_0 folgende Form hat:

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \cdot (z - z_0)^k = (z - z_0)^m \cdot \underbrace{\sum_{k=m}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \cdot (z - z_0)^{k-m}}_{g(z_0) \neq 0}$$

15.8.6 Beispiele

(a) $f(z) = \sin z,\ z_0 = 0.$

Dann ist $f(0) = 0,\ f'(0) = \cos 0 = 1 \neq 0 \Rightarrow 0$ ist eine einfache Nullstelle von sin. Es gilt:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1} = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \ldots = z \cdot \left[1 - \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{120}z^4 - \ldots \right]$$

(b) $f(z) = 1 - \cos z,\ z_0 = 0.$

Dann ist $f(0) = 0,\ f'(0) = \sin 0 = 0,\ f''(0) = \cos 0 = 1 \neq 0$

$\Rightarrow 0$ ist eine zweifache Nullstelle von f. Weiterhin gilt:

$$1 - \cos z = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot z^{2n} = 1 - \left[1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \ldots \right] = z^2 \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{24}z^2 + \cdots \right]$$

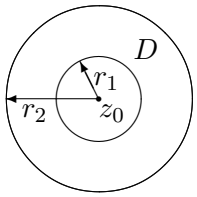
15.8.7 Satz

Die Funktion f sei holomorph in einer Umgebung von z_0, und nicht identisch mit Null, und sei $f(z_0) = 0$. Dann gibt es eine natürliche Zahl m, so daß z_0 Nullstelle der Ordnung m ist. Weiterhin besitzt z_0 eine Umgebung, wo z_0 die **einzige** Nullstelle von f ist (d.h. die Nullstelle z_0 ist *isoliert*).

15.9 Isolierte Singularitäten, Laurent-Entwicklung

15.9.1 Satz

Die Funktion f sei im Ringgebiet $D = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ mit $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$, holomorph. Dann läßt sich f in D in eine *Laurent-Reihe* um z_0 entwickeln:



$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k.$$

Die Koeffizienten a_k sind durch

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_K \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\, dw$$

gegeben, wobei K ein beliebiger, positiv orientierter Kreis um z_0 ist, der im Innern von D liegt.

Anmerkungen

(1) Die Koeffizienten der Laurent-Reihe sind eindeutig im folgenden Sinne: Gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \cdot (z - z_0)^k, \quad z \in D$$

so ist $b_k = a_k$ für jedes k.

(2) Man nennt

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$$

den *regulären Teil*,

$$h(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k}$$

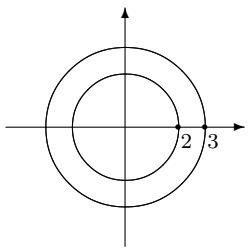
den *Hauptteil* der Laurententwicklung.

Es gilt: $f(z) = g(z) + h(z)$.

15.9.2 Beispiel

Für die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{(z-3)} - \frac{1}{(z-2)}$$



sollen Laurent-Entwicklungen für die Ringgebiete $|z| < 2$, $2 < |z| < 3$ und $|z| > 3$ um den Punkt 0 angegeben werden. In diesem Falle brauchen wir keine Integrale zu berechnen.

$|\mathbf{z}| < \mathbf{2}:\ \dfrac{1}{z-2} = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\dfrac{1}{2}\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{2}\right)^k = -\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{k+1}}\cdot z^k$

konvergiert für $\left|\frac{z}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < 2$ (geometrische Reihe $\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$).

$|\mathbf{z}| > \mathbf{2}:\ \dfrac{1}{z-2} = \dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{2}{z}} = \dfrac{1}{z}\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{2}{z}\right)^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{2^k}{z^{k+1}} = \sum\limits_{k=-1}^{-\infty}\dfrac{1}{2^{k+1}}\cdot z^k$

konvergiert für $\left|\frac{2}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > 2$.

Analog:

$|\mathbf{z}| < \mathbf{3}:\ \dfrac{1}{z-3} = -\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{3^{k+1}}\cdot z^k$

$|\mathbf{z}| > \mathbf{3}:\ \dfrac{1}{z-3} = \dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{3}{z}} = -\sum\limits_{k=-1}^{-\infty}\dfrac{1}{3^{k+1}}\cdot z^k$

Damit ergibt sich:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{3^{k+1}}\right)\cdot z^k \qquad \text{für} \quad |z| < 2$$

(Taylor-Entwicklung, Hauptteil = 0)

$$f(z) = -\sum_{k=-1}^{-\infty}\frac{1}{2^{k+1}}\cdot z^k - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^{k+1}}\cdot z^k \qquad \text{für} \quad 2 < |z| < 3$$

$$f(z) = -\sum_{k=-1}^{-\infty}\left(\frac{1}{3^{k+1}} - \frac{1}{2^{k+1}}\right)\cdot z^k \qquad \text{für} \quad |z| > 3$$

(regulärer Teil = 0)

15.9.3 Definition

Sei f holomorph in $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$ und sei $h(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}$ der Hauptteil der Laurententwicklung von f in z_0.
Man nennt den Punkt z_0

(i) *hebbare Singularität*, falls $h(z) = 0$, d.h. $a_{-k} = 0$ für alle $k = 1, 2, \ldots$.

(ii) *Pol der Ordnung* m ($m = 1, 2, \ldots$), falls $h(z) = \sum k = 1^m \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}$, d.h. $a_{-k} = 0$ für $k > m$.

(iii) *wesentliche Singularität*, falls $a_{-k} \neq 0$ für unendlich viele $k > 0$.

15.9.4 Beispiele

(a) Die Funktion $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Die Laurententwicklung in $z_0 = 0$ lautet:

$$f(z) = \frac{1}{z}\cdot\sin z = \frac{1}{z}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot z^{2k}$$

$\Rightarrow h(z) = 0 \Rightarrow 0$ ist eine hebbare Singularität. Die Potenzreihe auf der rechten Seite ist eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ und nimmt bei 0 den Wert 1 an. Deshalb läßt sich f zu einer in ganz $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion $\widetilde{f}$ erweitern, indem man setzt:

$$\widetilde{f}(z) = f(z), \text{ wenn } z \neq 0 \text{ und } \widetilde{f}(0) = 1$$

(b) Die Funktion $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z + 7}{z - 2}$ ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{2\}$.

Polynomdivision: $f(z) = \underbrace{\dfrac{7}{z-2}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{2 + (z-2)}_{\text{reg. Teil}}$

Der Punkt 2 ist eine Polstelle der Ordnung 1.

(c) Die Funktion $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und die Laurententwicklung in 0 ist

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^k = \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{1}{(-k)!} z^k$$

d.h. unendlich viele Koeffizienten a_{-k} sind von 0 verschieden $\Rightarrow$ 0 ist eine wesentliche Singularität.

15.9.5 Satz

Die Funktion f sei auf der offenen Menge D holomorph. Dann hat f in $z_0 \in D$ eine Nullstelle der Ordnung m genau dann, wenn die Funktion $\frac{1}{f}$ in z_0 eine Polstelle der Ordnung m besitzt.

15.9.6 Beispiele

Mit Hilfe von 15.9.5 und 15.8.5 kann man oft die Ordnung einer Polstelle einfach bestimmen.

(a) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$, $z_0 = 0$. $\frac{1}{f(z)} = \sin z$ hat eine Nullstelle erster Ordnung in 0, da $\cos 0 \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{\sin z}$ hat eine Polstelle erster Ordnung bei 0.

(b) Die Funktion $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ hat eine Nullstelle erster Ordnung bei 0 (da $\frac{1}{\cos^2 0} \neq 0$) $\Rightarrow$ $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$ hat eine Polstelle 1. Ordnung bei 0.

(c) $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ hat eine Polstelle erster Ordnung in 0.

15.9.7 Satz

Die Funktion f sei auf der offenen Menge D holomorph und sei $r > 0$ so, daß

$$Kr = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| \geq r\} \subset D$$

. Dann gilt: z_0 ist genau dann eine

(i) hebbare Singularität, wenn f auf Kr beschränkt ist,

(ii) Polstelle, wenn $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$ (der Grenzwert muß also existieren),

(iii) wesentliche Singularität, wenn f in **jeder beliebig kleinen** Umgebung von z_0 **jedem** komplexen Wert **beliebig nahe** kommt.

15.10 Residuensatz und Anwendung

Ziel: Berechnung von Integralen der Form $\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz$, wobei γ eine geschlossene Kurve ist und f im Inneren von γ endlich viele Singularitäten besitzt.

Eine Methode kennen wir bereits: Satz 15.6.11

15.10.1 Definition

Es sei f eine im Kreisgebiet $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$ holomorphe Funktion. Der Koeffizient a_{-1} der Laurentreihe von f um z_0 heißt *Residuum* von f an der Stelle z_0.
Schreibweise: $a_{-1} = \operatorname{Res}(f,\, z_0)$.
Nach Satz 15.9.1 gilt $\operatorname{Res}(f,\, z_0) = \dfrac{1}{2\pi i} \cdot \displaystyle\int_{|z-z_0|} f(z)\, dz$ wobei $0 < d < r$.

15.10.2 Beispiele

(a) $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z + 7}{z - 2} = \overbrace{\dfrac{7}{z-2}}^{a_{-1}} + 2 + (z - 2) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Res}(f, 2) = 7$

(b) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, Laurententwicklung an der Stelle 0:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z}\right)^k \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Res}(f, 0) = 1$$

15.10.3 Satz

(i) Hat f die Form $f = \frac{g}{h}$, wobei g und h in einer Umgebung von z_0 holomorph sind und $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$ (d.h. z_0 ist eine einfache Polstelle von f), so gilt:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

(ii) Hat f die Form

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$$

wobei g in einer Umgebung von z_0 holomorph ist und $g(z_0) \neq 0$, (d.h. z_0 ist eine n-fache Polstelle von f), so gilt

$$\operatorname{Res}(f,\, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot g^{(n-1)}(z_0)$$

15.10.4 Beispiele

(a) $f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$ hat einfache Polstellen in i und $-i$. Mit $h(z) = 1 + z^2$ gilt $h'(z) = 2z$.

$$\operatorname{Res}(f,\, i) = \frac{1}{h'(i)} = \frac{1}{2i} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Res}(f,\, -i) = -\frac{1}{2i}$$

(b) $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$, $z_0 = 0$, $n = 2$. Polstelle zweiter Ordnung in 0. Mit $g(z) = e^z$ gilt $g'(z) = e^z$ und $\operatorname{Res}(f,\, 0) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot g^{(n-1)}(z_0) = 1$.

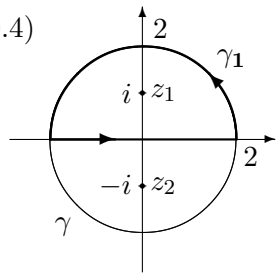
15.10.5 Satz (Risiduensatz)

Es sei γ ein positiv orientierter, doppelpunktfreier, geschlossener Weg in der offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$. Ferner sei die Funktion f holomorph in D mit Ausnahme von endlich vielen Punkten $z_1, \ldots, z_n$ die in γ liegen. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f,\, z_k)$$

15.10.6 Beispiele

(a) $$\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{1+z^2}\,dz = 2\pi i \cdot [\underbrace{\mathrm{Res}\,(f,\,i)}_{\frac{1}{2i}} + \underbrace{\mathrm{Res}\,(f,-i)}_{-\frac{1}{2i}}] = 0 \qquad \text{(aus 15.10.4)}$$



$$\int\limits_{\gamma_1} \frac{1}{1+z^2}\,dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}\,(f,\,i) = \pi.$$

(b) $$\int\limits_{|z|=r} \frac{e^z}{z^2}\,dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}\,(f,\,0) = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i \qquad (r>0)$$

15.10.7 Eine Anwendung: Berechnung von reellen uneigentlichen Integralen $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

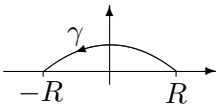
Grundidee

(1) Man setzt f zu einer Funktion fort, die auf $\mathbb{C}$ mit Ausnahme von endlich vielen Singularitäten holomorph ist.

(2) Man wählt einen geeigneten, geschlossenen Integrationsweg γ in $\mathbb{C}$, der das Intervall $[-R,\,R]$ enthält.

(3) Man berechnet mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{-R}^{R} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_R} f(z)\,dz$$



(4) Man bildet den Grenzwert $R \to \infty$. In viele Fällen konvergiert das Integral über γ_R (der Teil von γ, der sich nicht auf der reellen Achse befindet) gegen 0, so daß die linke Seite gleich dem gesuchten Integral ist.

15.10.8 Beispiel

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Wir betrachten $f(z) = \frac{1}{1+z^2},\ (z \in \mathbb{C} \setminus \{-i,\,i\})$

$$\pi = \int\limits_{\gamma} \frac{1}{1+z^2}\,dz \qquad \text{(aus 15.10.6.a)}$$

$$= \int\limits_{-R}^{R} \frac{1}{1+z^2}\,dz + \int\limits_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^2}\,dz$$

Wir zeigen: $\int_{\gamma_R} \xrightarrow{R\to\infty} 0$

$$\left|\int\limits_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^2}\,dz\right| \le \pi \cdot R \cdot \max_{|z|=R} \frac{1}{|1+z^2|} \qquad \text{(nach 15.6.5.iv)}$$

Für beliebige komplexe Zahlen z gilt: $|z+w| \geq |z| - |w|$ (Dreiecksungleichung)

$|z| \leq |w| + |z+w| \Rightarrow |z+w| \leq |z| - |w|$

$\Rightarrow |z^2+1| \geq R^2 - 1 \quad \Rightarrow \frac{1}{|z^2+1|} \leq \frac{1}{R^2-1}$

$$\Rightarrow \left| \int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^2}\, dz \right| \leq \pi \cdot R \cdot \frac{1}{R^2-1} \to 0 \quad (R \to \infty)$$

$$\Rightarrow \pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

15.10.9 Satz

Es sei R eine rationale Funktion, die auf $\mathbb{R}$ keine Polstelle hat, der Grad des Nenners von R sei mindestens zwei größer als der Grad des Zählers. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{Res}(R,\, z)$$

15.10.10 Beispiel

Wir zeigen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Die Polstellen des Integranden R sind:

$$z_1 = e^{\frac{\pi i}{4}}, \quad z_2 = e^{\frac{3\pi i}{4}} = {z_1}^3, \quad z_3 = e^{\frac{5\pi i}{4}} = {z_1}^5, \quad z_4 = e^{\frac{7\pi i}{4}} = {z_1}^7$$

$$R(z) = \frac{z^2}{1+z^4} = \underbrace{\frac{1}{(z-z_1)}}_{h} \cdot \underbrace{\frac{z^2}{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}}_{g} \qquad (15.10.3.\text{i})$$

$$\operatorname{Res}(R,\, z_1) + \operatorname{Res}(R,\, z_2) = \frac{{z_1}^2}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} + \frac{{z_2}^2}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)} = \frac{1}{2\sqrt{2}i}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, dx = 2\pi i \frac{1}{2\sqrt{2}i} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

15.11 Konforme Abbildungen

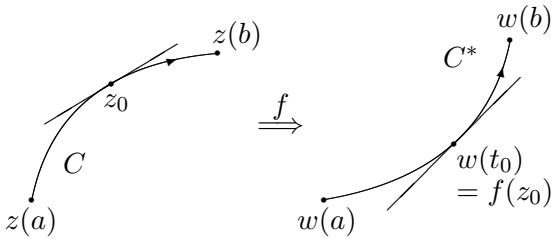
Ziel: Untersuchung von geometrischen Eigenschaften von holomorphen Funktionen (Abbildungen).

15.11.1 Einführung

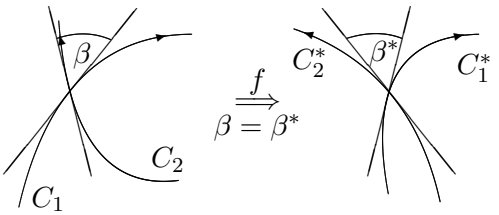
Sei $C : z(t) = x(t) + iy(t),\ a \le t \le b$ eine glatte, orientierte Kurve in der komplexen Ebene, $t_0 \in [a,\, b]$ und z_0 ein Punkt auf der Kurve.
Wegen der Glattheit besitzt die Kurve in jedem Punkt eine Tangente mit dem Richtungsfaktor $(x'(t),\, y'(t))^T$. Dieser Vektor ist eindeutig durch $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ bestimmt, deshalb werden wir auch $z'(t)$ als Richtungsvektor für die Tangente bezeichnen.
Sei weiterhin f eine, auf der offenen Menge $D \supset C$ holomorphe Funktion. f bildet die Kurve C in die Kurve $C^* : w(t) = f(z(t)),\ a \le t \le b$. Bildpunkte von z_0: $w(t_0) = f(z_0)$.

Nach der Kettenregel gilt: $w'(t_0) = f'(z(t_0)) \cdot z'(t_0) = f'(z_0) \cdot z'(t_0)$. Ist $f'(z_0) \neq 0$, so ist auch $w'(t_0) \neq 0$ und folglich besitzt die Bildkurve C^* im Punkt $f(z_0)$ eine Tangente mit dem Richtungsvektor

$$w'(t_0) = f'(z_0) \cdot z'(t_0).$$



Wir erhalten den Tangentialvektor von C^* im Punkt $f(z_0)$ dadurch, daß wir die Tangentenrichtung von C im Punkt z_0 um den Winkel $\alpha = \arg f'(z_0)$ drehen (Multiplikation ist eine Drehstrechung). Dieser Winkel ist unabhängig von C.



Daraus folgt: Sind C_1 und C_2 zwei glatte Kurven, die durch z_0 verlaufen, so vermittelt f eine Abbildung, bei der der Winkel zwischen den Tangentenpaaren in z_0 nach Größe und Drehsinn erhalten bleibt. Abbildungen mit dieser Eigenschaft heißen *winkeltreu* im Punkt z_0.

15.11.2 Satz zur Winkeltreue

Sei f in einer Umgebung von z_0 holomorphe Funktion mit $f'(z_0) \neq 0$. Dann ist f in z_0 winkeltreu.

15.11.3 Bemerkung

Auf die Forderung $f'(z_0) \neq 0$ kann **nicht** verzichtet werden.

Beispiel: $f(z) = z^2,\ z_0 = 0,\ f'(z) = 2z,\ f'(z_0) = 0$
Durch f wird die positive reelle Achse in sich abgebildet, die positive imaginäre Achse wird wegen $(iy)^2 = -y^2 < 0$ in die negative reelle Achse abgebildet $\Rightarrow$ f ist nicht winkeltreu in $z_0 = 0$.

15.11.4 Definition: Konforme Abbildung

Eine Abbildung f heißt *konform* im Punkt z_0, wenn f in einer Umgebung von z_0 holomorph ist und $f'(z_0) \neq 0$. Man nennt f *konform in einem Gebiet* D, wenn f in jedem Punkt von D konform ist.

Aufgabe: Bei Anwendungen (z.B. Strömungsproblemen) um ein gegebenes Gebiet auf ein anderes, einfacheres Gebiet abzubilden.

Die Möglichkeit solcher Abbildungen ist durch folgenden Satz gesichert:

15.11.5 Satz (Riemannscher Abbildungssatz)

Sind D und D^* einfach zusammenhängende echte Teilgebiete von $\mathbb{C}$, so gibt es eine konforme Abbildung f, die D ein-eindeutig auf D^* abbildet.

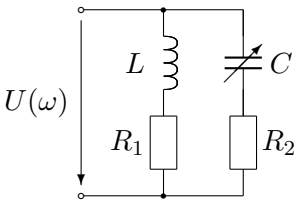
15.11.6 Gebrochen lineare Abbildungen

Abbildungen der Form

$$f(z) = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}, \quad z \in \mathbb{C}$$

wobei a, b, c, $d \in \mathbb{C}$ und c oder d von 0 verschieden, heißen *gebrochen lineare Abbildungen.*

Z.B. bei elektrischen Schwingkreisen:



komplexer Widerstand Z als Funktion der Kapazität C:

$$Z(C) = \frac{a \cdot C + b}{c \cdot C + d}, \quad C \in \mathbb{R}$$

wobei

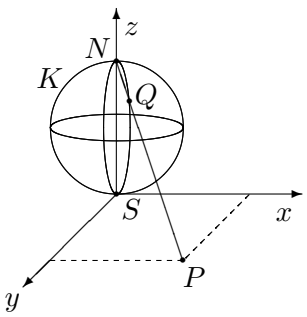
$$a = -\omega^2 L R_2 + i\omega R_1 R_2 \qquad c = -\omega^2 L + i\omega(R_1 + R_2)$$
$$b = R_1 + i\omega L \qquad d = 1$$

Der Graph von $Z(C)$ heißt *Ortskurve* der Schaltung.

15.11.7 Die Riemannsche Zahlenkugel

Wir betrachten in $\mathbb{R}^3$ ein x, y, z-Koordinatensystem. Die komplexen Zahlen $w = x + iy$ fassen wir als Punkte der x, y-Ebene auf. Wir legen um den Punkt $(0, 0, \frac{1}{2})$ eine Kugeloberfläche K mit dem Radius $\frac{1}{2}$.

Der Punkt $N(0, 0, 1)$ heißt *Nordpol*, der Punkt $S(0, 0, 0)$ heißt *Südpol.*
Sei $w = x + iy$ eine beliebige komplexe Zahl und $P(x, y, 0)$ der zugehörige Punkt in der x, y-Ebene. Wir verbinden die Punkte P und N durch eine Gerade. Diese besitzt genau einen Schnittpunkt Q mit K, die sogenannte *stereographe Projektion* von P auf K.



Zwischen den Koordinaten (Q_x, Q_y, Q_z) von Q und den Koordinaten von P bestehen die Beziehungen:

$$Q_x = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \; Q_y = \frac{y}{1 + x^2 + y^2}, \; Q_z = \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad x = \frac{Q_1}{1 - Q_z}, \; y = \frac{Q_y}{1 - Q_z}$$

Jeder komplexen Zahl entspricht ein **eindeutig bestimmter** Punkt auf $K \setminus \{N\}$ und umgekehrt.
Wir ordnen dem Nordpol N formal einen *unendlich fernen Punkt* z_∞ zu (der auch mit ∞ bezeichnet wird). Durch Hinzunahme von z_∞ schließen wir die komplexe Ebene ab.
$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{z_\infty\}$: *erweiterte komplexe Ebene.*

Addition und Multiplikation lassen sich **nicht** so auf $\overline{\mathbb{C}}$ ausdehnen, daß die Grundeigenschaften erhalten bleiben. Es ist jedoch sinnvoll, folgende Rechenregeln für alle $z \in \mathbb{C}$ zu vereinbaren:

$$z + z_\infty = z_\infty + z = z_\infty \qquad z \cdot z_\infty = z_\infty \cdot z = z_\infty \quad (z \neq 0)$$
$$\frac{z}{z_\infty} = 0 \qquad \frac{z}{0} = z_\infty \quad (z \neq 0)$$

15.11.8 Möbiustransformation

Wir betrachten wieder die gebrochene lineare Abbildung

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Man nennt f eine *Möbius-Transformation*, falls f nicht konstant ist.
Leicht zu zeigen: f ist genau dann eine Möbius-Transformation, wenn

$$ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

Fall $c = 0$: $f(z) = \frac{a}{d} \cdot z + \frac{b}{d} = A \cdot z + B$ wobei $A = \frac{a}{d}$ und $B = \frac{b}{d}$. Dann ist f eine lineare Abbildung und bewirkt folgendes:

- eine Streckung um den Faktor $|A|$ (bezogen auf den Nullpunkt)
- eine Drehung um den Nullpunkt mit Drehwinkel $\arg A$
- eine Verschiebung um den komplexen Vektor B

Fall $c \neq 0$: durch Polynomdivision:

$$f(z) = -\frac{ad-bc}{c} \cdot \frac{1}{cz+d} + \frac{a}{c} \tag{15.1}$$

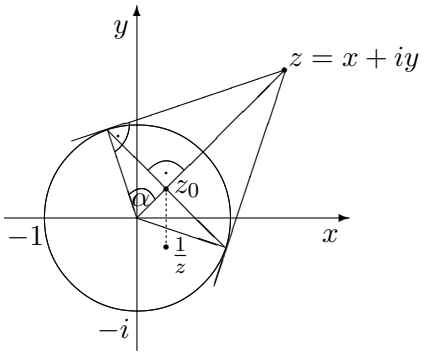
Man kann leicht zeigen: Ist $ad - bc \neq 0$, so ist f eine ein-eindeutige Abbildung von $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$.

Die inverse Abbildung: $z = f^{-1}(w) = \frac{dw+b}{cw-a}$, $w \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$. Folglich ist f eine konforme Abbildung (da $f'(z) \neq 0$)

Forsetzung auf die abgeschlossene Zahlenebene $\overline{\mathbb{C}}$: Ist $ad - bc \neq 0$, so setzen wir $f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ und $f(\infty) = \frac{a}{c}$ $(c \neq 0)$ und $f(\infty) = \infty$, falls $c = 0$.
Dann ist f eine **ein-eindeutige** Abbildung von $\overline{\mathbb{C}}$ auf $\overline{\mathbb{C}}$. Die Abbildung f ergibt sich durch Hintereinanderausführung von den folgenden drei Abbildungen (wegen (15.1)):

$$z \longrightarrow z_1 = cz + d \qquad \text{(lineare Abbildung)}$$
$$z_1 \longrightarrow z_2 = \frac{1}{z_1} \qquad \text{(Bildung der Inversen)}$$
$$z_2 \longrightarrow w = -\frac{ad-bc}{c} \cdot z_2 + \frac{a}{c} \qquad \text{(lineare Abbildung)}$$

Geometrische Deutung der Inversion ($z \to \frac{1}{z}$)



Wir zeichnen die Tangenten an den Einheitskreis, die durch z gehen. Behauptung: $|z_0| = \frac{1}{|z|}$.

$$\cos\alpha = \frac{1}{|z|} = \frac{|z_0|}{1}$$

$z \to z_0$: Inversion bezüglich des Einheitskreises.
Spiegelung bezüglich der x-Achse.

$$\Rightarrow \quad |z_0| = \frac{1}{|z|}, \ \arg\frac{1}{z} = -\arg z$$

In den folgenden Aussagen betrachten wir auch Geraden als Kreise (mit unendlichem Radius).

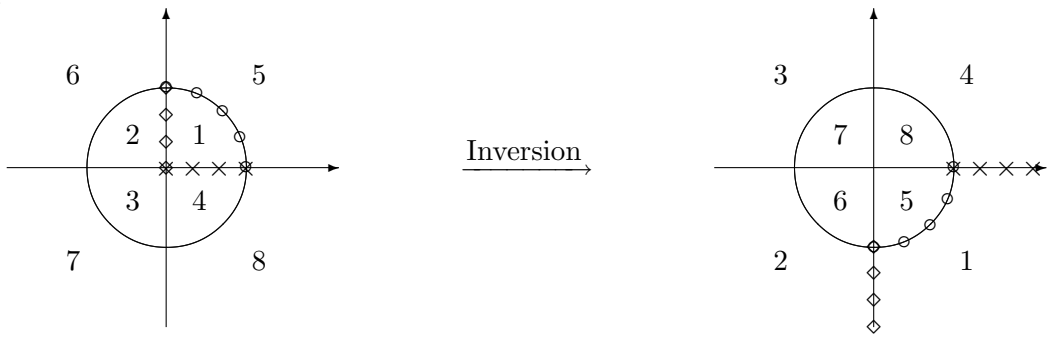
(i) Jeder Kreis in $\mathbb{C}$ erfüllt eine Gleichung der Form

$$A \cdot z \cdot \overline{z} + B \cdot z + \overline{B \cdot z} + C = 0$$

wobei $A, C \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}$ und $A \cdot C < |B|^2$. Umgekehrt beschreiben solche Gleichungen Kreise in $\mathbb{C}$, für $A = 0$ liegen Geraden vor, z. B. $A = 1,\ B = 0,\ C = -4 \Rightarrow |z|^2 = 4$.

(ii) Jede Möbiustransformation führt Kreise in Kreise über (die sogenannte *Kreisverwandtschaft*, *Kreistreue*).

$z \to \frac{1}{z}$:



Wenn $|z| = 1$, dann $\frac{1}{z} = \overline{z}$ (Spiegelung bzgl. der x-Achse)

$$\boxed{p \cdot i \quad (0 \le p \le 1), \qquad \frac{1}{p \cdot i} = -\frac{1}{p} \cdot i \quad (0 < p \le 1)}$$

Abbildung $z \to \frac{1}{z}$

Gerade $\xrightarrow{\text{oder}}$ Kreis / Gerade durch den Nullpunkt

Kreis $\xrightarrow{\text{oder}}$ Kreis / Gerade (wenn der Kreis durch 0 geht)

15.12 Anwendungen

15.12.1 Ebene stationäre Strömungen

Wir betrachten eine

- stationäre (d.h. die Geschwindigkeit ist zeitunabhängig)
- reibungsfreie, imkompressible
- wirbelfreie
- quellenfreie

Strömung in einem Gebiet D der x, y-Ebene. Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ in einem Punkt $(x,\, y)$ sei durch

$$\vec{v}(x,y) = (v_1(x,y),\, v_2(x,y))^T$$

gegeben. Dann gilt

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \tag{15.2}$$

(da Strömung quellenfrei) und

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \left(0,\, 0,\, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)^T = \vec{O}$$

(da Strömung wirbelfrei). Aus dieser Gleichung folgt die Existenz einer reellwertigen Funktion Φ in D mit

$$\operatorname{grad} \Phi = \vec{v} \qquad \text{d. h.} \qquad v_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

(siehe (12.5.7) oder (10.5.6)). Φ heißt *Geschwindigkeitspotential* der Strömung. Setzen wir diese Gleichungen in (15.2) ein, so folgt

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \tag{15.3}$$

Φ erfüllt die Laplace-Gleichung, ist also eine harmonische Funktion. Im Abschnitt 15.3. haben wir gesehen, daß Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion harmonisch sind.

Frage: Gibt es eine holomorphe Funktion, deren Realteil Φ ist?

15.12.2 Satz

Sei g eine im einfach zusammenhängenden Gebiet D harmonische Funktion. Dann gibt es eine hamronische Funktion h so, daß die FUnktion

$$f(z) = g(z) + ih(z)$$

holomorph ist. Die Funktion h ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.
man sagt: h ist zu g *konjugiert harmonisch.* g und h erfüllen die Cauchy-Riemannschen DGLen (Abschnitt 15.3).

15.12.3 Das komplexe Strömungspotential

Seien $\vec{v}$ und Φ wie in (15.12.1). $\vec{v}$ läßt sich auch in komplexer Form darstellen als

$$v(z) = v(x+iy) = v_1(x+iy) + iv_2(x+iy).$$

Nach dem vorhergehenden Satz existiert eine zu Φ konjugiert harmonische Funktion Ψ. Die holomorphe Funktion

$$F(z) = F(x+iy) = \Phi(x,y) + i\Psi(x,y)$$

nennt man das *komplexe Stömungspotential.* Φ heißt *Potential-* und Ψ *Stromfunktion.*
Nach Satz 15.3.7 (Cauchy-Riemannsche DGL) ist

$$F'(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - i\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

und folglich

$$\boxed{v(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \overline{F'(z)}}$$

Man kann zeigen: Die obigen Überlegungen lassen sich auch dann durchführen, wenn in der Strömung Punktquellen bzw. Punktwirbel vorhanden sind. Das zugehörige komplexe Potential F hat dann in diesen Punkten Singularitäten.

Seien jetzt:

C : eine positiv orientierte Kurve, geschlossen, doppelpunktfrei und glatt.

N : der Fluß von $\vec{v}$ durch C.

Γ : die Zirkulation (Wirbelstärke) von $\vec{v}$ entlang C

Dann gilt:

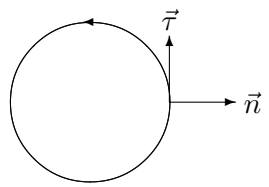
$$\Gamma + iN = \int_C F'(z)\,dz,$$

also

$$\boxed{\Gamma = \operatorname{Re}\int_C F'(z)\,dz} \qquad \text{und} \qquad \boxed{N = \operatorname{Im}\int_C F'(z)\,dz}$$

Anmerkung zur Definition von Fluß und Zirkulation:

C :



C : $\gamma(t), \quad <\leq t \leq b$

$\vec{\tau} = (\tau_1,\, \tau_2)^T$, Tangentenvektor, normiert ($|\vec{\tau}| = 1$)

$\tau = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$, $\vec{n} = (-\tau_2,\, \tau_1)^T$

Fluß von $\vec{v}$ durch C: $\displaystyle\int_C (\vec{v},\, \vec{n})\,ds = \int_a^b (\vec{v}(\gamma(t)),\, \vec{n}(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)|\,dt$

Zirkulation von $\vec{v}$ längs C: $\displaystyle\int_C (\vec{v},\, \vec{\tau})\,ds$

Index

Abbildung, konforme, 28
Abbildungssatz (Riemann), 29
Anfangswertprobleme
    Halbschrittverfahren, 4
    numerische Verfahren, 3
    Polynomzugmethode, 3

Bereich (offene Menge), 7

Cauchy-Riemann DGLn, 9
Cauchysche Integralformel, 18
Cauchyscher Integralsatz, 17

Differenzierbarkeit, 8

Elementare Fkten in $\mathbb{C}$, 11
Entwicklungspunkt, 10
erweiterte kompl. Ebene, 29
Euler'sche GLN, 12
Eulersche Polynomzugmethode, 3

Halbschrittverfahren, 4
harmonische Funktion, 10
Holomorphie, 8

Kettenregel, 9
Komplexe Zahlen, 6
Konforme Abbildungen, 28
konjugiert harmonisch, 32
konjugiert komplex, 6
Konvergenz, 7
Konvergenzkreis, 11
Konvergenzradius, 11
Kreistreue, 31
Kurve (Weg), 8
Kurvenintegrale, 13

Laplace-Gleichung, 10
Laurent-Entwicklung, 22
lineare DGL-Systeme
    1. Ordnung, konst Koeff., 1
Logarithmusfunktionen, 13

Möbiustransformation, 30

offene Menge (Bereich), 7

Ortskurve, 29

Partialsumme, 10
Polynomzugmethode, 3
Potentialfunktion, 33
Potenzreihen, 10
Potenzreihenentwicklung, 20

Residuen, 24
Residuensatz, 25
Riemannsche Zahlenkugel, 29
Riemannscher Abbildungssatz, 29

Singularität
    hebbare, 23
    isolierte, 22
    wesentliche, 23
Stammfunktion, 16
stetige Funktionen, 7
Stromfunktion, 33

Umkehrfunktion, Ableitung, 9

Weg (Kurve), 8
Weg, zusammengesetzter, 14
Winkeltreue, 28

Zahlenkugel (Riemann), 29
zusammengesetzter Weg, 14
zusammenhängend, 8
Zwischensumme, 15