

Mathematik IV für Elektrotechniker – SS 05  
Prof. Dr. Sasvári, TU Dresden  
Mitschrift

Fabian Kurz  
<http://fkurz.net/>

Zuletzt aktualisiert:  
12. Juli 2005

# Inhaltsverzeichnis

<b>16</b>	<b>Wahrscheinlichkeitstheorie</b>	<b>1</b>
16.1	Zufällige Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten . . . . .	1
16.1.1	Zufall, zufälliges Ereignis . . . . .	1
16.1.2	Relationen zwischen zufälligen Ereignissen . . . . .	2
16.1.3	Definition: Häufigkeit . . . . .	2
16.1.4	Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit . . . . .	3
16.1.5	Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit . . . . .	4
16.1.6	Satz: Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten . . . . .	4
16.1.7	Beispiele . . . . .	4
16.1.8	Aufgabe . . . . .	5
16.1.9	Beispiel (Geometrische Wahrscheinlichkeit) . . . . .	5
16.2	Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit . . . . .	6
16.2.1	Definition: Bedingte Häufigkeit . . . . .	6
16.2.2	Definition: Bedingte Wahrscheinlichkeit . . . . .	6
16.2.3	Definition: Unabhängigkeit . . . . .	6
16.2.4	Beispiele . . . . .	6
16.2.5	Satz . . . . .	7
16.2.6	Beispiel . . . . .	7
16.2.7	Satz (Bayes'sche Formeln) . . . . .	7
16.2.8	Beispiele . . . . .	8
16.3	Zufallsgrößen und Verteilungen . . . . .	8
16.3.1	Beispiele für zufällige Zahlen/Größen . . . . .	8
16.3.2	Definition: Verteilungsfunktion . . . . .	9
16.3.3	Satz . . . . .	9
16.3.4	Spezielle diskrete Verteilungen . . . . .	10
16.3.5	Spezielle stetige Verteilungen . . . . .	12
16.3.6	Unabhängigkeit von Zufallsgrößen . . . . .	13
16.3.7	Satz . . . . .	13
16.4	Charakteristiken von Zufallsgrößen . . . . .	14
16.4.1	Definition . . . . .	14
16.4.2	Beispiele . . . . .	14
16.4.3	Satz . . . . .	14
16.4.4	Definition . . . . .	15
16.4.5	Satz . . . . .	15
16.4.6	Beispiele . . . . .	15
16.4.7	Satz . . . . .	16
16.4.8	$E(X)$ und $V(X)$ für spezielle Zufallsgrößen . . . . .	16
16.4.9	Beispiel . . . . .	17
16.4.10	Definition . . . . .	17
16.4.11	Eigenschaften . . . . .	17
16.5	Zufallsvektoren . . . . .	17

16.5.1	Definition . . . . .	17
16.5.2	Satz . . . . .	18
16.5.3	Satz . . . . .	18
16.5.4	Beispiele . . . . .	18
16.5.5	Berechnung der Kovarianz . . . . .	19
16.6	Der Zentrale Grenzwertsatz . . . . .	19
16.6.1	Satz . . . . .	19
<b>17</b>	<b>Partielle Differentialgleichungen</b>	<b>20</b>
17.1	Grundbegriffe, Beispiele . . . . .	20
17.1.1	. . . . .	20
17.1.2	Beispiele (aus der Physik) . . . . .	20
17.1.3	Einige Beispiele für die Lösung von partiellen Differentialgleichungen . . .	21
17.1.4	Die Diffusionsgleichung . . . . .	21
17.1.5	Wellengleichung . . . . .	22
17.1.6	Die Laplace-Gleichung . . . . .	22
17.1.7	Die Poisson-Gleichung . . . . .	22
17.2	Lineare Gleichungen erster Ordnung . . . . .	22
17.2.1	Gleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	22
17.2.2	Gleichungen mit variablen Koeffizienten . . . . .	23
17.3	Anfangs- und Randbedingungen . . . . .	23
17.3.1	. . . . .	23
17.3.2	Korrekt gestellte Probleme . . . . .	25
17.4	Typeinteilung von Gleichungen zweiter Ordnung . . . . .	25
17.4.1	Definition . . . . .	25
17.4.2	Beispiele . . . . .	25
17.4.3	Lineare Transformation der unabhängigen Variablen . . . . .	26
17.5	Wellen und Diffusionen . . . . .	26
17.5.1	Die Wellengleichung . . . . .	26
17.5.2	Beispiel . . . . .	26
17.5.3	Satz (Maximum-Prinzip) . . . . .	27
17.5.4	Folgerung (Eindeutigkeit des Dirichlet-Problems) . . . . .	27
17.5.5	Die Diffusionsgleichung auf der ganzen Achse . . . . .	27
17.5.6	Satz . . . . .	28
17.6	Randwertprobleme, Trennung der Variablen . . . . .	28
17.6.1	Wellengleichung, Dirichlet-Bedingung . . . . .	28
17.6.2	Diffusionsgleichung, Dirichlet-Bedingung . . . . .	29

# Kapitel 16

## Wahrscheinlichkeitstheorie

**Literatur:** L. Papula: Mathematik für Ingenieure, Band 3

### 16.1 Zufällige Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten

#### 16.1.1 Zufall, zufälliges Ereignis

**Beispiele:**

- (a) Das Werfen eines Würfels. Zufällige Ereignisse dabei sind z.B. das Auftreten einer geraden Augenzahl, das Auftreten der Zahl 1, ...
- (b) Anzahl von Telefongesprächen während einer bestimmten Stunde in einer Telefonzentrale
- (c) zufälliges Ziehen von Kugeln oder Losen aus einer Urne
- (d) Geburten (Junge oder Mädchen)

Aufgabe der Wahrscheinlichkeitstheorie: Das Problem des Zufalls mit einem **mathematischen Modell** zu erfassen. Das Modell ist auf eine bestimmte Form des Zufalles beschränkt, wie er in sogenannten *zufälligen Versuchen* zu beobachten ist:

- wenigstens gedanklich sollten die Versuche unter den **gleichen** Bedingungen beliebig oft wiederholbar sein.
- bestimmte Bedingungen, die den Ausgang des Versuches nicht determinieren

#### Mathematisches Modell für Ereignisse

Wir ordnen einem Zufallsexperiment eine Menge  $\Omega$  zu, deren Elemente  $\omega$  die Versuchsausgänge bezeichnen. Sie heißen *Elementarereignisse* (oder auch *Stichproben*, *Realisierungen*).

Gewisse Teilmengen von  $\Omega$  sind die *Ereignisse*, die in unserem Modell in Betracht gezogen werden. Genauer, wir identifizieren  $A \subset \Omega$  mit dem Ereignis, daß ein  $\omega \in A$  der beobachtete Versuchsausgang ist. Die Gesamtheit dieser Ereignisse wird mit  $\mathcal{A}$  bezeichnet und heißt *Ereignisfeld*.

**Beispiele**

- (a) Das Werfen eines Würfels:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $\mathcal{A} =$  alle Teilmengen von  $\Omega$ . z.B.  $A = \{2, 4, 6\}$  ist das Ereignis „gerade Augenzahl.“
- (b) Zufallsexperiment: Zweimal werfen.  $\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}$ ,  $i, j$  ganz.  $\mathcal{A} =$  alle ( $2^{36}$ ) Teilmengen von  $\Omega$ .

(c) Schießen auf eine Schießscheibe vom Radius 1 m.  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Ereignis z.B.: die untere Hälfte wird getroffen. Bei diesem Beispiel ist es nicht sinnvoll, alle Teilmengen als Ereignisse zu betrachten.

### 16.1.2 Relationen zwischen zufälligen Ereignissen

$\Omega, \mathcal{A}, A, B \in \mathcal{A}$

1.  $A \subset B$  bedeutet:  $A$  zieht  $B$  nach sich (aus  $A$  folgt  $B$ ), d.h. wenn  $A$  eingetreten ist, so ist auch  $B$  eingetreten.

**Beispiel:**  $A$ : Augenzahl 1  $\Rightarrow A = \{1\}$ ,  $B$ : ungerade Augenzahl  $\Rightarrow B = \{1, 3, 5\}$

Dann ist  $A \subset B$ ; aus  $A$  folgt  $B$ .

2. Das Ereignis  $C = A \cup B$  (lies  $A$  oder  $B$ ) heißt die *Vereinigung* (*Summe*) der Ereignisse  $A$  und  $B$  und tritt ein, wenn mindestens eines der Ereignisse  $A$  oder  $B$  eintritt.

**Beispiel:**  $A = \{2\}$ ,  $B = \{1, 3, 5\}$ ,  $C = A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$

3. Das Ereignis  $C = A \cap B$  (lies  $A$  und  $B$ ) heißt *Durchschnitt* (*Produkt*) und tritt genau dann ein, wenn beide Ereignisse  $A$  und  $B$  eintreten.

**Beispiel:**  $A = \{1\}$ ,  $B = \{1, 3, 5\}$ ,  $C = A \cap B = \{1\}$ .

4.  $\Omega$ : *sicheres Ereignis*, tritt stets ein

5.  $\emptyset$ : *unmögliches Ereignis*, tritt niemals ein

6.  $\bar{A}$  (lies: nicht  $A$  oder  $A$  quer): heißt das zu  $A$  *komplementäre* Ereignis, und tritt genau dann ein, wenn  $A$  nicht eintritt.  $\bar{\bar{A}} = A$ .

**Beispiel:**  $A = \{1, 3, 5\}$ , ungerade.  $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$ , gerade.

Es gilt:  $A \cup \bar{A} = \Omega$ ,  $\Omega$  und  $\emptyset$  sind zueinander komplementär:  $\bar{\Omega} = \emptyset$ ;  $\bar{\emptyset} = \Omega$ .

7.  $A$  und  $B$  heißen *disjunkt* oder *unvereinbar*, wenn ihr gleichzeitiges Eintreten unmöglich ist, d.h.  $A \cap B = \emptyset$ .

**Bemerkung:** Für Ereignisse gelten die selben Rechenregeln wie für Mengen.

$$A \cup A = A \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad \text{usw.}$$

### 16.1.3 Definition: Häufigkeit

Ein zufälliger Versuch werde  $n$ -mal wiederholt. Die Anzahl  $H_n(A)$  des Eintretens eines zufälligen Ereignisses  $A$  unter diesen  $n$  Wiederholungen heißt die *absolute Häufigkeit* von  $A$ . Der Quotient  $h_n(A) = \frac{H_n(A)}{n}$  heißt die *relative Häufigkeit* von  $A$ .

#### Eigenschaften

(i)  $0 \leq h_n(A) \leq 1$

(ii)  $h_n(\emptyset) = 0$ ,  $h_n(\Omega) = 1$

(iii)  $h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B)$ , wenn  $A$  und  $B$  unvereinbar sind,  $A \cap B = \emptyset$

(iv)  $h_n(A) = 1 - h_n(\bar{A})$  oder  $h_n(A) + h_n(\bar{A}) = 1$

Die relative Häufigkeit zeigt eine Stabilität, wenn die Anzahl der durchgeführten Versuche hinreichend groß ist.

Die Stabilität der relativen Häufigkeit wurde schon früh erkannt und an vielen Beispielen nachgeprüft.

## Beispiele

- (a) Wurf eines Geldstückes.  $A$  = das Auftreten einer Zahl

$n$	$H_n(A)$	$h_n(A)$	Durchgeführt von
4040	2048	0,5080	Buffon, 18. Jh.
12000	6019	0,5016	Pearson, Anfang 20. Jh.
24000	12012	0,5005	Pearson

- (b) Wurf mit einem Würfel,  $A$  = Augenzahl 1

$n$	$H_n(A)$	$h_n(A)$
50	5	0,1000
100	13	0,1300
500	88	0,1760
1000	159	0,1590
5000	822	0,1644

Im Allgemeinen existiert eine feste Zahl, um die die relative Häufigkeit eines zufälligen Ereignisses schwankt und der sie sich um so mehr nähert, desto größer  $n$  ist. Diese Zahl wird man als die *empirische Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $A$*  auffassen können.

### 16.1.4 Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit

**Annahme:** Es gibt nur endlich viele, *gleichmögliche (gleichwahrscheinliche)* einander ausschließende Versuchsergebnisse, von denen **genau eines** eintritt.

Jedes Ereignis  $A$  ist dann durch bestimmte Versuchsergebnisse festgelegt; man nennt diese „die für  $A$  günstigen“ Versuchsergebnisse. Unter dieser Voraussetzung erklärt man die Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  des Ereignisses  $A$  durch

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Versuchsergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Versuchsergebnisse}}$$

und nennt diese Wahrscheinlichkeit die *klassische (oder kombinatorische) Wahrscheinlichkeit*.

## Beispiele

- (a) Zufallsversuch „Würfeln“.  $A$  = eine durch 3 teilbare Augenzahl.

alle Versuchsergebnisse: 1, 2, 3, 4, 5, 6

für  $A$  günstige Ergebnisse: 3, 6

$$\Rightarrow P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- (b) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man beim Zahlenlotto im Spiel „6 aus 49“ einen Sechser erzielt.

$$\text{Anzahl der möglichen Fälle: } \binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot (49-6)!} = 13.983.816$$

Anzahl der günstigen Fälle: 1

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{\binom{49}{6}} \approx 7,15 \cdot 10^{-9}$$

### 16.1.5 Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit

Axiome, die die Ereignisse definieren:

Ausgangspunkt: eine Menge  $\Omega$  (Menge der *Elementarereignisse*) und ein System  $\mathcal{A}$  von Teilmengen von  $\Omega$  (*Ereignisalgebra*) mit den folgenden Eigenschaften:

- (i)  $\Omega \in \mathcal{A}, \emptyset \in \mathcal{A}$
- (ii) wenn  $A \in \mathcal{A}$ , dann gilt  $\bar{A} \in \mathcal{A}$
- (iii) wenn  $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A}$ , dann  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \in \mathcal{A}$  und  $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \in \mathcal{A}$

**Axiome, die die Wahrscheinlichkeit definieren:**

**Axiom 1:** Jedem Ereignis  $A \in \mathcal{A}$  wird eine reelle Zahl  $P(A)$  zugeordnet für die  $0 \leq P(A) \leq 1$  gilt.

**Axiom 2:**  $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$

**Axiom 3:** Wenn  $A_1, A_2, A_3$  paarweise unvereinbar sind, so gilt:  $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$

Speziell:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ , wenn  $A \cap B = \emptyset$

### 16.1.6 Satz: Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

- (i)  $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- (ii) Gilt für die Ereignisse  $A$  und  $B$  die Beziehung  $A \subset B$  (aus  $A$  folgt  $B$ ), so ist  $P(A) \leq P(B)$ .
- (iii) (Additionssatz)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- (iv)  $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

### 16.1.7 Beispiele

- (a) Es werden 3 Spielwürfel geworfen. Was ist wahrscheinlicher: Eine 11 oder eine 12 als Augensumme zu erhalten?

Die Zahlen 11 und 12 kann man auf 6 verschiedene Weisen in je 3 Summanden zerlegen:

$$11 = 1 + 5 + 5 = 1 + 4 + 6 = 2 + 3 + 6 = 2 + 4 + 5 = 3 + 3 + 5 = 3 + 4 + 4$$

$$12 = 1 + 5 + 6 = 2 + 4 + 6 = 2 + 5 + 5 = 3 + 4 + 5 = 3 + 3 + 6 = 4 + 4 + 4$$

$\Rightarrow$  Gleichmöglichkeit des Auftretens von 11 und 12?

**Fehler:** zum Beispiel erscheint die Zerlegung  $1 + 5 + 5$  nicht auf einer sondern auf drei verschiedene Weisen:  $1 + 5 + 5 = 5 + 1 + 5 = 5 + 5 + 1$ . Oder  $1 + 5 + 6$  insgesamt  $3! = 6$  Möglichkeiten.

11  $\longrightarrow$  27 verschiedene Möglichkeiten

12  $\longrightarrow$  25 verschiedene Möglichkeiten

- (b) Aus einem Kartenspiel (32 Karten) werden 3 Karten gezogen. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter ihnen wenigstens 1 As vorkommt ( $A$ ).

$A_1 =$  genau 1 As,  $A_2 =$  genau 2 Asse,  $A_3 =$  genau 3 Asse

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

Anzahl aller möglichen Kombinationen von 3 Karten:  $\binom{32}{3}$

Anzahl der günstigen Fälle für:

$$A_1 : \binom{4}{1} \binom{28}{2} \Rightarrow P(A_1) = \frac{\binom{4}{1} \binom{28}{2}}{\binom{32}{3}} \approx 0,3048$$

$$A_2 : \binom{4}{2} \binom{28}{1} \Rightarrow P(A_2) = \frac{\binom{4}{2} \binom{28}{1}}{\binom{32}{3}} \approx 0,0339$$

$$A_3 : \binom{4}{3} \binom{28}{0} \Rightarrow P(A_3) = \frac{\binom{4}{3} \binom{28}{0}}{\binom{32}{3}} \approx 0,0008$$

$$\Rightarrow P(A) = 0,3395$$

**Andere Lösung:**  $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ ,  $\bar{A} =$  kein As.  $P(\bar{A}) = \frac{\binom{28}{3}}{\binom{32}{3}} \approx 0,6605$

### 16.1.8 Aufgabe

2 Spieler:  $S_1, S_2$  3 Würfel:  $W_1, W_2, W_3$  mit den folgenden Augenzahlen:

$W_1 : 5, 7, 8, 9, 10, 18,$   $W_2 : 2, 3, 4, 15, 16, 17,$   $W_3 : 1, 6, 11, 12, 13, 14$

**Das Spiel:** Zuerst wählt  $S_1$  einen Würfel, dann  $S_2$ . Beide würfeln (mit dem gewählten Würfel). Wer die größte Augenzahl hat bekommt 1 EUR. Sie sind  $S_1$ , welchen Würfel würden Sie wählen?

$$P(W_1 > W_2) = \frac{21}{36}, \quad P(W_2 > W_3) = \frac{21}{36}, \quad P(W_3 > W_1) = \frac{21}{36}$$

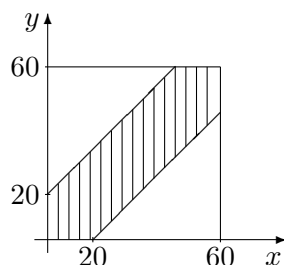
$\Rightarrow S_2$  kann immer einen „besseren“ Würfel wählen.

### 16.1.9 Beispiel (Geometrische Wahrscheinlichkeit)

Zwei Personen  $A$  und  $B$  verabreden sich an einem bestimmten Ort zwischen 12 und 13 Uhr zu treffen. Der zuerst Gekommene wartet auf den anderen 20 Minuten, danach geht er fort. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sie sich treffen, wenn jede von ihnen im Verlauf der angegebenen Stunde „auf gut Glück“ ankommen kann?

**Lösung:**  $x$ : Ankunftszeit von  $A$ ,  $y$ : Ankunftszeit von  $B$ .

$A$  und  $B$  treffen sich genau dann, wenn  $|x - y| \leq 20$ .



$$\underbrace{-20 \leq x - y \leq 20}_{y \leq x + 20}$$

$$\text{Analog: } y \geq x - 20$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit entspricht dem Verhältnis des Flächeninhalts des gestrichelten Gebiets zum Flächeninhalt des ganzen Quadrats.

$$P = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}$$



## 16.2 Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit

### 16.2.1 Definition: Bedingte Häufigkeit

Hat bei  $N$  Versuchen das Ereignis  $B$  genau  $n$ -mal ( $n \neq 0$ ) stattgefunden, und ist bei diesen  $n$  Versuchen  $k$ -mal (zusammen mit  $B$ ) auch das Ereignis  $A$  eingetreten, so wird der Quotient

$$h_{A|B} = \frac{k}{n}$$

die *bedingte relative Häufigkeit* von  $A$  unter der Bedingung  $B$  genannt. Bezeichnet  $h_B$  bzw.  $h_{A \cap B}$  die relative Häufigkeit von  $B$  bzw.  $A \cap B$  in der gesamten Versuchsreihe, so gilt:

$$h_{A \cap B} = \frac{k}{N}, \quad h_B = \frac{n}{N} \quad \Rightarrow \quad h_{A|B} = \frac{h_{A \cap B}}{h_B}$$

### 16.2.2 Definition: Bedingte Wahrscheinlichkeit

Es sei  $B \in \mathcal{A}$  ein Ereignis mit  $P(B) > 0$ . Für  $A \in \mathcal{A}$  nennt man die Zahl

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{16.1}$$

die *bedingte Wahrscheinlichkeit* des Ereignisses  $A$  unter der Bedingung  $B$ .

**Beispiel:** Wurf mit einem Würfel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine 1 auftritt, wenn bekannt ist, daß eine ungerade Zahl geworfen wurde?

$$\begin{aligned} A = \{1\}, \quad B = \{1, 3, 5\}. \quad P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3} > P(A) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Im Allgemeinen kann  $P(A|B)$  größer, gleich oder auch kleiner als  $P(A)$  sein.

Aus (16.1) folgt, daß  $P(A|B) = P(A)$ , genau dann, wenn  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .

Man definiert deshalb:

### 16.2.3 Definition: Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  heißen (stochastisch) *unabhängig*, wenn  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$  gilt.

**Allgemeiner:** Die Ereignisse  $A$  und  $B$  heißen *vollständig unabhängig*, wenn für jede natürliche Zahl  $k \leq n$  und beliebige natürliche Zahlen  $i_1, \dots, i_k$  mit  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  die Bezeichnung  $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$  gilt

### 16.2.4 Beispiele

(a) Zweimaliges Werfen eines Würfels.

$\Omega$ : die Menge aller geordneten Paare von den Ziffern  $1 \dots 6$ .

$$\begin{array}{cccc} (1, 1) & (1, 2) & \dots & (1, 6) \\ (2, 1) & (2, 2) & \dots & (2, 6) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (6, 1) & (6, 2) & \dots & (6, 6) \end{array}$$

$A$ : beim ersten Wurf  $< 4$   
 $B$ : beim zweiten Wurf  $= 6$

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B)$$

$\Rightarrow A$  und  $B$  unabhängig.

(b) Bezeichnungen wie bei (a).

$A_1$ : beim 1. Wurf ungerade

$A_2$ : beim 2. Wurf ungerade

$A_3$ : Summe der geworfenen Augenzahlen ungerade

$A_1, A_2, A_3$  vollständig unabhängig, wenn

$$\left. \begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1) \cdot P(A_2) \\ P(A_1 \cap A_3) &= P(A_1) \cdot P(A_3) \\ P(A_2 \cap A_3) &= P(A_2) \cdot P(A_3) \end{aligned} \right\} \text{ paarweise Unabhängigkeit}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \Rightarrow A_1, A_2, A_3 \text{ paarweise unabhängig}$$

D.h.  $A_1, A_2, A_3$  sind paarweise aber nicht vollständig unabhängig.

Sind  $A_1, \dots, A_i, \dots, A_n$  unabhängig, so auch  $A_1, \dots, \overline{A_i}, \dots, A_n$ .

### 16.2.5 Satz

Es seien  $A_1, \dots, A_n$  unvereinbare Ereignisse mit  $P(A_i) > 0$  und  $A_1 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ .

Dann gilt für ein beliebiges Ereignis B:

$$(i) P(B) = \sum_{j=1}^n P(B \cap A_j)$$

$$(ii) P(B) = \sum_{j=1}^n P(B|A_j) \cdot P(A_j) \quad (\text{Formel der totalen Wahrscheinlichkeit})$$

### 16.2.6 Beispiel

Gegeben seien 5 Urnen. Von ihnen besitzen 2 Urnen den Inhalt  $A_1$ : je 2 weiße und 1 schwarze Kugel. 1 Urne den Inhalt  $A_2$ : 10 schwarze Kugeln, 2 Urnen den Inhalt  $A_3$ : je 3 weiße und 1 schwarze Kugel.

Eine Urne wird zufällig ausgewählt und aus ihr eine Kugel zufällig herausgenommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die herausgenommene Kugel weiß ist ( $= B$ )?

**Falsche Lösung:** insgesamt 24 Kugeln, davon 10 weiß.  $P(B) = \frac{10}{24}$ .

**Richtige Lösung:** Da die Ereignisse  $A_1, A_2, A_3$  (gesamt) die Bedingungen von Satz 16.2.5 erfüllen, gilt:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \cdot 0 + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{17}{30}$$

### 16.2.7 Satz (Bayes'sche Formeln)

$A_1, \dots, A_n$  wie in (16.2.5),  $P(B) > 0$ .

$$(i) P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{j=1}^n P(B|A_j) \cdot P(A_j)}$$

$$(ii) P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{P(B)}$$

## 16.2.8 Beispiele

- (a) Gegeben seien 5 Urnen folgenden Inhalts: 2 Urnen vom Inhalt  $A_1$  mit je 2 weißen und 3 schwarzen Kugeln, 2 Urnen vom Inhalt  $A_2$  mit je 1 weißen und 4 schwarzen Kugeln und 1 Urne vom Inhalt  $A_3$  mit je 4 weißen und 1 schwarzen Kugeln.

Aus einer zufällig gewählten Urne wird eine Kugel zufällig herausgenommen. Sie sei weiß ( $B$ ). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß diese Kugel aus der Urne vom Inhalt  $A_3$  stammt?

**Gesucht:**  $P(A_3|B)$

**Gegeben:**  $P(A_1) = \frac{2}{5}$ ,  $P(A_2) = \frac{2}{5}$ ,  $P(A_3) = \frac{1}{5}$

$P(B|A_1) = \frac{2}{5}$ ,  $P(B|A_2) = \frac{1}{5}$ ,  $P(B|A_3) = \frac{4}{5}$

$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3) \cdot P(B|A_3)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \dots} = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{2}{5}$$

Analog:  $P(A_1|B) = \frac{2}{5}$ ,  $P(A_2|B) = \frac{1}{5}$

- (b) Von 3 gleichartigen Maschinen eines Betriebes stelle die erste 20%, die zweite 30%, die dritte 50% der Gesamtproduktion her. Dabei verursacht die erste 5%, die zweite 4%, die dritte 2% Ausschuß in ihrer eigenen Produktion. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein zufällig gefundenes Ausschußstück von der 1. Maschine produziert wurde.

$A_i$  sei das Ereignis, daß das Produkt der  $i$ -ten Maschine entstammt ( $i = 1, 2, 3$ ).

$B$ : Ausschuß

**Gesucht:**  $P(A_1|B)$

**Gegeben:**  $P(A_1) = 0,2$ ;  $P(A_2) = 0,3$ ;  $P(A_3) = 0,5$ .

$P(B|A_1) = 0,05$ ,  $P(B|A_2) = 0,04$ ,  $P(B|A_3) = 0,02$ .

Die Voraussetzungen der Bayes'schen Formeln sind erfüllt:

$$\Rightarrow P(A_1|B) = \frac{0,2 \cdot 0,05}{0,2 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,04 + 0,5 \cdot 0,02} = 0,31$$

Analog:  $P(A_2|B) = 0,38$ ,  $P(A_3|B) = 0,31$

## 16.3 Zufallsgrößen und Verteilungen

### 16.3.1 Beispiele für zufällige Zahlen/Größen

- die Zahl der Anrufe in einer Telefonzentrale innerhalb einer bestimmten Stunde
- die Anzahl der kosmischen Teilchen, die im Verlaufe einer Stunde auf einen bestimmten Teil der Erde auftreffen
- der Abstand des Treffpunktes eines Geschosses vom Mittelpunkt einer Zielscheibe vom Radius 1
- die Geschwindigkeit eines Gasmoleküls
- Wurf mit einem Würfel, mögliche Werte 1, 2, ..., 6

*Zufallsgröße:*  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , d.h., jedem Elementarereignis wird eine reelle Zahl zugeordnet.

Zufallsgrößen werden i.A. mit  $X, Y, Z, \dots$ , die Werte, die sie annehmen (sog. *Realisierungen*) mit  $x, y, z, \dots$  bezeichnet.

Zur Vorgabe einer Zufallsgröße  $X$  müssen wir wissen, welche Werte sie annehmen kann und mit welcher Wahrscheinlichkeit sie diese Werte annimmt, bzw. mit welcher Wahrscheinlichkeit ihre Werte in bestimmte Intervalle fallen.

**Im letzten Beispiel:**  $X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $P(X = 1) = P(X = 2) = \dots = P(X = 6) = \frac{1}{6}$

**Im dritten Beispiel:** Wertebereich:  $[0, 1]$ ,  $P(X = x) = 0$  für alle  $x \in [0, 1]$ , aber  $P(X < \frac{1}{2})$  (Intervall  $[0, \frac{1}{2})$ ) könnte  $> 0$  sein.

**Definition:** Eine Zufallsgröße heißt *diskret*, wenn sie endlich oder abzählbar-unendlich viele verschiedene Werte annehmen kann. Eine Menge heißt *abzählbar-unendlich*, wenn sich ihre Elemente als unendliche Folge schreiben lassen:  $a_1, a_2, a_3, \dots$ . Z.B. die Menge der rationalen Zahlen  $\mathbb{R}$  oder  $[0, 1]$  sind nicht abzählbar.

### 16.3.2 Definition: Verteilungsfunktion

Die *Verteilungsfunktion*  $F$  einer Zufallsgröße  $X$  ist definiert durch  $F(x) = P(X < x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Beispiel:**  $X$  wie oben (Wurf mit einem Würfel)

$$P(X < 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(x) = 0 \text{ für } x \leq 1$$

Für ein  $x$  mit  $1 < x \leq 2$  gilt:

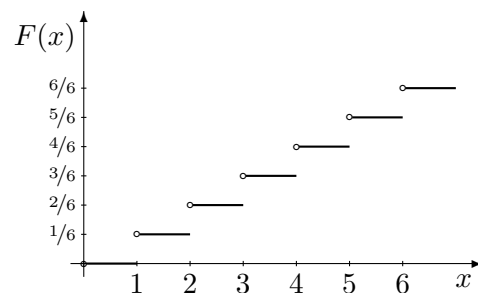
$$F(x) = P(X < x) = P(X = 1) = \frac{1}{6}$$

Analog: Für  $2 < x \leq 3$  gilt:

$$F(x) = P(X < x) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2}{6}$$

$\vdots$

Für  $x > 6$  gilt:  $F(x) = P(X < x) = 1$



### 16.3.3 Satz

Die Verteilungsfunktion  $F$  einer beliebigen Zufallsgröße  $X$  besitzt die folgenden Eigenschaften:

(i)  $x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad F(x_1) \leq F(x_2)$ , ( $F$  ist monoton wachsend)

(ii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$

(iii)  $F$  ist linksseitig stetig

Weiterhin gilt:  $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$ ,  $P(a \leq X \leq b) = \underbrace{F(b+0) - F(a)}_{\lim_{x \uparrow b}}$ ,

$$P(X = a) = F(a+0) - F(a)$$

Ist die Verteilungsfunktion stetig, so heißt auch die Zufallsgröße  $X$  *stetig*. Für eine stetige Zufallsgröße  $X$  gilt:  $P(X = x) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$

**Verteilungsfunktion diskreter Zufallsgrößen:**  $X$  nehme die Werte  $x_1, x_2, x_3, \dots$  mit den Wahrscheinlichkeiten  $p_i = P(X = x_i)$  an ( $i = 1, 2, \dots$ ). Dann gilt:  $F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i$ .

Die Funktion  $F$  ist eine Treppenfunktion, die in den Punkten  $x_i$  Sprünge der Höhe  $p_i$  besitzt.

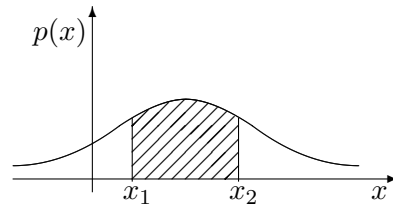
**Absolutstetige Verteilungsfunktionen:** Eine Zufallsgröße  $X$  und ihre Verteilungsfunktion  $F$  heißen *absolutstetig*, wenn eine nichtnegative, integrierbare Funktion  $p$  mit:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

existiert. Die Funktion  $p$  heißt *Dichte* (*Dichtefunktion*) der Zufallsgröße  $X$ .

Eine Dichte  $p$  besitzt die folgenden Eigenschaften:

- (1)  $p(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$
- (2)  $\int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = 1$
- (3)  $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(t) dt$
- (4)  $F' = p$  wenn  $p$  stetig ist



### 16.3.4 Spezielle diskrete Verteilungen

#### (a) Die diskrete gleichmäßige Verteilung

Ein Spezialfall wurde bereits betrachtet: Wurf mit einem idealen Würfel: Hier kann  $X$  die Werte  $x_k = k$  mit den Wahrscheinlichkeiten  $p_k = \frac{1}{6}$  ( $k = 1, \dots, 6$ ) annehmen. Da alle Wahrscheinlichkeiten einander gleich sind, spricht man von einer *gleichmäßigen Verteilung*.

**Allgemein:** Eine diskrete Zufallsgröße  $X$  mit den endlich vielen Werten  $x_1, \dots, x_n$  heißt *gleichmäßig verteilt*, wenn

$$p_k = P(X = x_k) = \frac{1}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

#### (b) Binominalverteilung

Es seien eine natürliche Zahl  $n \geq 1$  und eine reelle Zahl  $p \in [0, 1]$ . Eine Zufallsgröße  $X$  mit den Werten  $0, 1, 2, \dots, n$  heißt *binominalverteilt* mit den Parametern  $n$  und  $p$ , wenn gilt:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

**Zum Beispiel:**  $P(X = 0) = (1 - p)^n$  oder  $P(X = n) = p^n$ ,  $P(x = 1) = n \cdot p \cdot (1 - p)^{n-1}$

Für  $n = 1$  erhält man die sogenannte *Null-Eins-Verteilung*.

**Wichtiges Beispiel:** Das *Bernullische Versuchsschema*.

Wir betrachten einen zufälligen Versuch und ein Ereignis  $A$  dieses Versuches mit  $P(A) = p$ . Der Versuch werde  $n$ -mal Wiederholt,  $X :=$  Anzahl des Eintretens von  $A$  bei diesen  $n$  Wiederholungen. Dann ist  $X$  eine Zufallsgröße; mögliche Werte:  $0, 1, 2, \dots, n$ .

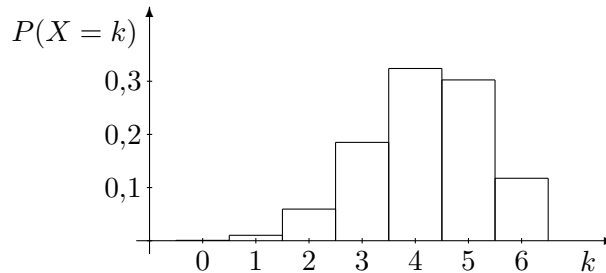
$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n)$$

$\Rightarrow X$  ist binominalverteilt.

**Beispiel:** Werden aus einer Urne mit 7 schwarzen und 3 weißen Kugeln hintereinander 6 Kugeln **mit Zurücklegen** gezogen, so ist die Anzahl  $X$  der gezogenen schwarzen Kugeln binomial verteilt mit den Parametern  $n = 6$ ,  $p = \frac{7}{10}$  ( $A$ : die gezogene Kugel ist schwarz).

Zum Beispiel:  $P(X = 5) = \binom{6}{5} \cdot 0,7^5 \cdot 0,3^1 = 0,3025$  oder  $P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6) = \binom{6}{5} \cdot 0,7^5 \cdot 0,3^1 + \binom{6}{6} \cdot 0,7^6 \approx 0,420$

Berechnet man alle  $P(X = k)$ , so erhält man folgendes *Histogramm*:



**Anderes Beispiel:** Es ist bekannt, daß von einem Produkt ungefähr  $p \cdot 100\%$  Ausschuß ist. Die Anzahl der zum Ausschuß gehörenden Produkte in einer zufällig entnommenen **Stichprobe vom Umfang**  $n$  ist dann eine Zufallsgröße mit einer Binominalverteilung mit den Parametern  $n$  und  $p$ . Dabei wird vorausgesetzt, daß jedes entnommene Produkt wieder **zurückgelegt** wird.

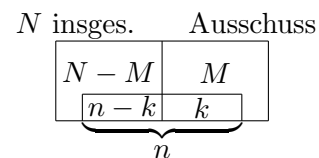
**(c) Die hypergeometrische Verteilung (Stichproben ohne Zurücklegen)**

Eine Lieferung eines Produktes besteht aus  $N$  Elementen, von denen  $M < N$  Ausschuß sind. Es werden  $n$  Elemente zufällig und **ohne Zurücklegen** entnommen.

Zufallsgröße  $X$  : Anzahl der Ausschußprodukte in dieser Stichprobe.  $P(X = k) = ?$

( $0 \leq X \leq n$  und  $X \leq M$ )

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad (0 \leq k \leq n, k \leq M)$$



*Hypergeometrische Verteilung* mit den Parametern  $N$ ,  $M$  und  $n$ . Würde man zurücklegen, so hätte  $X$  eine Binominalverteilung mit den Parametern  $n$  und  $p = \frac{M}{N}$ .

**(d) Die Poisson-Verteilung**

Eine Zufallsgröße  $X$ , die die Werte  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$  annehmen kann heißt *poissonverteilt* mit dem Parameter  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ), wenn

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Diese Verteilung hat große praktische Bedeutung; so haben z.B. folgende Zufallsgrößen eine Poissonverteilung:

- Anzahl der Atome einer radioaktiven Substanz, die in einem gegebenen Zeitintervall zerfallen.
- Anzahl der Gespräche, die während einer festen Zeitspanne in einer Telefonzentrale ankommen.

**Bemerkung:**  $1 \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{e^{\lambda}}$

**Beispiel:** In einer Telefonzentrale kommen durchschnittlich 5 Anrufe pro Minute an, die Anzahl  $X$  der Anrufer sei poissonverteilt. Dann ist  $\lambda = 5$  (Begründung später, in (16.4.2)). Z.B.

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= \sum_{k=2}^{\infty} P(X = k) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - \frac{5^0}{0!} \cdot e^{-5} - \frac{5^1}{1!} \cdot e^{-5} \approx 0,96 \end{aligned}$$

### 16.3.5 Spezielle stetige Verteilungen

#### (a) Die stetige gleichmäßige Verteilung

Eine absolutstetige Zufallsgröße  $X$  besitzt die *gleichmäßige Verteilung im Intervall*  $[a, b]$  ( $a < b$ ), wenn ihre Dichte  $p$  durch

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben ist.

**Bemerkung:**  $1 \stackrel{?}{=} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \sum_a^b p(x) dx = \sum_a^b \frac{1}{b-a} dx = 1$

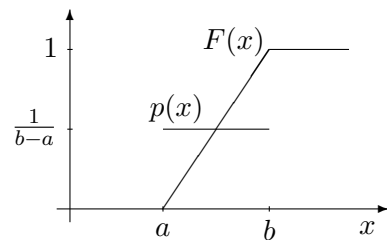
Verteilungsfunktion:  $F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$

$$F(x) = 0 \quad (x < a)$$

$$F(x) = 1 \quad (x \geq b)$$

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a} \quad (a \leq x \leq b)$$

$$F'(x) = p(x), (x \neq a, x \neq b)$$



#### (b) Die Exponentialverteilung

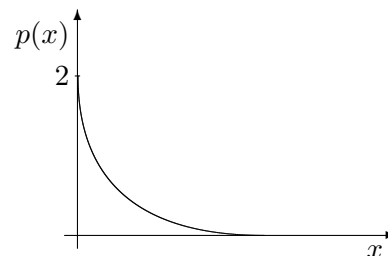
Eine absolute Zufallsgröße  $X$  besitzt die *Exponentialverteilung mit dem Parameter*  $\alpha > 0$ , wenn sie die Dichte

$$p(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x \\ \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot x} & x \geq 0 \end{cases}$$

und somit die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt = \begin{cases} 0 & 0 < x \\ 1 - e^{-\alpha \cdot x} & x \geq 0 \end{cases}$$

hat.



**Beispiele:** zufällige Dauer:

- eines Telefongesprächs
- Reparaturarbeiten
- Bedienung an einem Bankschalter
- Zeit zwischen 2 Telefonanrufen
- Zeit zwischen Maschinenstörungen

### (c) Die Normalverteilung (Gauß-Verteilung)

Viele empirisch auftretende Zufallsgrößen besitzen eine Normalverteilung.

#### Beispiele:

- zufällige Meßfehler
- Abweichungen eines Werkstückes von der Norm
- gewisse Größen bei der Brown-schen Molekularbewegung

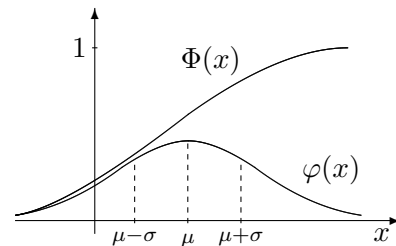
Es seien  $\mu$  eine reelle und  $\sigma$  eine positive reelle Zahl. Eine absolutstetige Zufallsgröße  $X$  heißt *normalverteilt mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma$*  (bzw.  $N(\mu, \sigma)$ -Verteilt), wenn die Dichte  $p$  von  $X$  folgende Gestalt hat:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

#### Bezeichnungen:

$\varphi(x; \mu, \sigma)$  : Dichtefunktion  
 $\Phi(x; \mu, \sigma)$  : Verteilungsfunktion
 } der Normalverteilung

$$\Phi(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$



### 16.3.6 Unabhängigkeit von Zufallsgrößen

$X, Y$ : Zufallsgrößen, die zum **selben** Versuch gehören.

Unabhängigkeit  $\approx$  jede Realisierung von  $X$  hat keinen Einfluß auf die Realisierung von  $Y$  und umgekehrt.

**Definition:**  $X$  und  $Y$  heißen *unabhängig*, wenn gilt:

$$P((X < x) \cap (Y < y)) = P(X < x) \cdot P(Y < y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

**Allgemeiner:** Die Zufallsgrößen  $X_1, \dots, X_n$  heißen (vollständig) *unabhängig*, wenn für alle  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  gilt:

$$P(X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n) = P(X_1 < x_1) \cdot \dots \cdot P(X_n < x_n)$$

Eine Folge  $X_1, X_2, \dots$  von Zufallsgrößen nennt man eine *Folge unabhängiger Zufallsgrößen*, wenn für jedes  $n \geq 2$  die Zufallsgrößen  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig sind.

### 16.3.7 Satz

Es seien  $X_1, \dots, X_k$  unabhängige Zufallsgrößen und  $X = X_1 + \dots + X_k$ .

- $X_j$  poissonverteilt mit den Parametern  $\lambda_j \Rightarrow X$  poissonverteilt mit den Parametern  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k$ .
- $X_j$  normalverteilt mit den Parametern  $\mu_j, \sigma_j \Rightarrow X$  normalverteilt mit den Parametern  $\mu_1 + \dots + \mu_k$  und  $\sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_k^2}$ .
- $X_j$  binominalverteilt mit den Parametern  $n_j, p \Rightarrow X$  binominalverteilt mit den Parametern  $n_1 + \dots + n_k$  und  $p$ .



## 16.4 Charakteristiken von Zufallsgrößen

### 16.4.1 Definition

Es sei  $X$  eine diskrete Zufallsgröße mit den Werten  $x_k$  und den Einzelwahrscheinlichkeiten  $p_k = P(X = x_k)$ . Dann nennt man die Zahl

$$\mu = E(x) = \sum_k x_k \cdot p_k$$

*Erwartungswert* von  $X$ , sofern die rechts stehende Reihe absolut konvergent ist (d.h.  $\sum_k |x_k| \cdot p_k < \infty$ ). Ist  $X$  eine absolut stetige Zufallsgröße mit Dichte  $p$ , so ist der Erwartungswert  $E(x)$  definiert als

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx$$

sofern dieses uneigentliche Integral absolut konvergent ist (d.h.  $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot p(x) dx < \infty$ ).

### 16.4.2 Beispiele

- (a) Es sei  $X$  die Zufallsgröße, die beim Würfeln jedem Versuchsausgang die Augenzahl zuordnet. D.h.:  $x_k = k$ ,  $p_k = \frac{1}{6}$  ( $k = 1, \dots, 6$ )

$$\mu = E(x) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5$$

- (b) Es sei  $X$  eine mit dem Parameter  $\lambda$  poissonverteilte Zufallsgröße.

$$\begin{aligned} E(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot k \\ &= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}_{e^{\lambda}} = \lambda \end{aligned}$$

Bekannt:  $e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$

- (c) Ist  $X$  eine absolutstetige Zufallsgröße mit der Dichte  $p(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases}$ , so ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx = \int_1^{\infty} x \cdot \frac{1}{x^2} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^{\infty} = \infty$$

$\Rightarrow E(x)$  existiert nicht.

### 16.4.3 Satz

Seien  $X$  und  $Y$  Zufallsgrößen, so daß  $E(X)$  und  $E(Y)$  existieren. Dann gilt:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Sind  $a$  und  $b$  reelle Zahlen, so gilt:

$$E(a \cdot X + b) = a \cdot E(x) + b$$

Falls  $X$  und  $Y$  unabhängig sind, so ist:

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

Für  $a$  und  $b = -E(X)$  folgt daraus  $E(X - E(X)) = 0$ . Man nennt den Übergang von  $X$  zu  $X - E(X)$  *zentrieren* von  $X$ .

#### 16.4.4 Definition

Es sein  $X$  eine diskrete Zufallsgröße mit Erwartungswert  $E(X)$ . Unter der Voraussetzung der Konvergenz der entsprechenden Reihe nennt man die nichtnegative Zahl

$$\sigma^2 = V(X) = D^2(X) = E(\underbrace{(X - E(X))^2}_{\substack{\text{mögl. Werte} \\ (x_k - E(x))^2}}) = \sum_k (x_k - E(x))^2 \cdot p_k$$

*Streuung* oder *Varianz* von  $X$ .

Ist  $X$  eine absolutstetige Zufallsgröße mit der Dichte  $p$ , so ist die Streuung durch

$$\sigma^2 = V(X) = D^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (X - E(X))^2 \cdot p(x) dx$$

definiert, sofern das Integral existiert.

**Bemerkung:**  $V(x) \geq 0$ . Man kann zeigen:  $V(X) = 0 \Leftrightarrow X$  ist konstant (mit Wahrscheinlichkeit 1). D.h.  $P(X = c) = 1$  mit einer Konstanten  $c \in \mathbb{R}$ .

#### 16.4.5 Satz

Es sei  $X$  eine diskrete oder absolutstetige Zufallsgröße mit Erwartungswert  $E(X)$  und Varianz  $V(X)$ . Dann existiert  $E(X^2)$  und es gilt:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Im diskreten Fall:

$$V(X) = \left( \sum_k x_k^2 \cdot p_k \right) - \mu^2$$

und im absolutstetigen Fall

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p(x) dx - \mu^2.$$

#### 16.4.6 Beispiele

(a)  $X$ : Augenzahl beim Würfeln,  $E(X) = 3,5$ .

$$\sigma^2 = (1 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + (6 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} \approx 2,92$$

bzw. unter Verwendung von Satz 16.4.5:

$$\sigma^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6^2 \cdot \frac{1}{6} - 3,5^2 \approx 2,92$$

(b) Für die absolutstetige Zufallsgröße  $X$  mit der Dichte

$$p(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx = \int_0^1 x \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{7}{12}$$

und

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot p(x) dx = \int_0^1 \left(x - \frac{7}{12}\right)^2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{11}{144}$$

bzw. unter Verwendung von (16.4.5):

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p(x) dx - \mu^2 = \int_0^1 x^2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) dx - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}$$

### 16.4.7 Satz

Es seien  $X$  und  $Y$  **unabhängige** Zufallsgrößen mit Varianz  $V(X)$  bzw.  $V(Y)$ . Dann gilt:

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Weiterhin gilt:

$$V(a \cdot X + b) = a^2 \cdot V(X) \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

**Bemerkungen:** Aus diesem Satz folgt:

(a)  $V(-X) = V(X)$  und  $V(X + b) = V(X)$

(b)  $V\left(\frac{X}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot V(X) = 1$

Eine Zufallsgröße  $Y$  mit  $V(Y) = 1$  heißt *normiert*, und der Übergang von  $X$  zu  $\frac{X}{\sigma}$  heißt *Normierung* von  $X$ .

Durch Kombination von Zentrierung und Normierung erhält man eine sog. *standardisierte* Zufallsgröße  $Z$  mit  $E(Z) = 0$ ,  $V(Z) = 1$ .

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}} = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

### 16.4.8 $E(X)$ und $V(X)$ für spezielle Zufallsgrößen

(a)  $X$  binominalverteilt mit den Parametern  $n$  und  $p$ :  $E(X) = n \cdot p$ ,  $V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$

(b)  $X$  poissonverteilt mit Parameter  $\lambda$ :  $E(X) = \lambda$ ,  $V(X) = \lambda$

(c)  $X$  exponentialverteilt mit dem Parameter  $\alpha$ :  $E(X) = \frac{1}{\alpha}$ ,  $V(X) = \frac{1}{\alpha^2}$

$$\left( E(X) = \int_0^{\infty} x \cdot \underbrace{\alpha \cdot e^{-\alpha x}}_{p(x)}, V(X) = \int_0^{\infty} x^2 \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha x} dx - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \quad \text{partielle Integration} \right)$$

(d)  $X$  normalverteilt mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma$ :  $E(X) = \mu$ ,  $V(X) = \sigma^2$ .

### 16.4.9 Beispiel

Durch Standardisierung erhält man aus einer  $N(\mu, \sigma)$ -verteilten Zufallsgröße  $X$  die  $N(0, 1)$ -verteilte Zufallsgröße  $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ . Man nennt die  $N(0, 1)$ -Verteilung *standardisierte Normalverteilung* und bezeichnet ihre Dichte mit  $\varphi(x)$ , ihre Verteilungsfunktion  $\Phi(x)$ . Wegen der Symmetrie gilt:  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ .  $\varphi(x)$  ist eine gerade Funktion.

**Beispiel:** Das Gewicht von Zuckersäcken sei normalverteilt mit  $\mu = 5000$  g und  $\sigma = 50$  g. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Zuckersack weniger als 4970 g wiegt ist

$$P(X < 4970) = P\left(\underbrace{\frac{X - \mu}{\sigma}}_{N(0,1)} < \underbrace{\frac{4970 - \mu}{\sigma}}_{-0,6}\right) = \Phi(-0,6) = 1 - \Phi(0,6) \approx 0,2743$$

oder:

$$P(4900 \leq X \leq 5100) = P\left(\underbrace{\frac{4900 - \mu}{\sigma}}_{-2} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \underbrace{\frac{5100 - \mu}{\sigma}}_2\right) = \Phi(2) - \underbrace{\Phi(-2)}_{1 - \Phi(2)} \approx 0,9544$$

### 16.4.10 Definition

Es seien  $X$  und  $Y$  Zufallsgrößen mit den Erwartungswerten  $\mu_X$  bzw.  $\mu_Y$  und den Standardabweichungen  $\sigma_X$  bzw.  $\sigma_Y$  (beide  $\neq 0$ ). Der *Korrelationskoeffizient*  $\rho_{XY}$  von  $X$  und  $Y$  ist definiert durch

$$\rho_{XY} = \frac{E((X - \mu_X) \cdot (Y - \mu_Y))}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

Den Zähler nennt man *Kovarianz*:  $\text{cov}(X, Y)$ . Der Korrelationskoeffizient ist ein Maß für den Zusammenhang zwischen  $X$  und  $Y$ .

### 16.4.11 Eigenschaften

- (i)  $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$ . Ist  $\rho_{XY} = 0$ , so heißen  $X$  und  $Y$  *unkorreliert*.
- (ii) Aus der Unabhängigkeit von  $X$  und  $Y$  folgt  $\rho = 0$ . Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht.
- (iii) Ist  $\rho_{XY} = 1$  oder  $-1$ , so besteht zwischen  $X$  und  $Y$  eine lineare Beziehung  $X = a \cdot Y + b$  oder  $Y = a \cdot X + b$  mit gewissen Konstanten  $a$  und  $b$ .

Beispiel in 16.5.

## 16.5 Zufallsvektoren

### 16.5.1 Definition

Es seien  $X_1, \dots, X_n$  Zufallsgrößen. Den Vektor  $(X_1, \dots, X_n)$  nennen wir *Zufallsvektor* oder eine *n-mehrdimensionale Zufallsgröße*. Die Funktion

$$F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n), \quad x \in \mathbb{R}$$

heißt die ( $n$ -dimensionale) *Verteilungsfunktion* des Zufallsvektors  $(X_1, \dots, X_n)$ . Existiert eine Funktion  $p(x_1, \dots, x_n)$  so, daß für beliebige  $x_1, \dots, x_n$  die Gleichung

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} p(y_1, \dots, y_n) dy_n \cdots dy_1$$

besteht, dann heißt diese Funktion die *Dichte* des Zufallsvektors  $(X_1, \dots, X_n)$ .

Um die Bezeichnungen zu vereinfachen betrachten wir im Weiteren zweidimensionale Zufallsvektoren.

### 16.5.2 Satz

Es sei  $(X, Y)$  ein Zufallsvektor mit Verteilungsfunktion  $F(x, y)$  und bezeichne  $F_X$  ( $F_Y$ ) die Verteilungsfunktion der Zufallsgröße  $X$  (bzw.  $Y$ ). Dann gilt:

$$F_X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y) =: F(x, \infty) \quad \text{und} \quad F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y) =: F(\infty, y).$$

Sind  $X$  und  $Y$  diskret mit den Werten  $x_i$  und  $y_j$ , so gilt:

$$P(X = x_i) = \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) \quad \text{und} \quad P(Y = y_j) = \sum_i P(X = x_i, Y = y_j)$$

(*Randverteilungen*) Besitzt  $(X, Y)$  eine Dichte  $p(x, y)$ , so besitzen auch  $X$  und  $Y$  eine Dichte  $p_X$  bzw.  $p_Y$  für die gilt:

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy \quad \text{und} \quad p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx$$

( $p_X$  und  $p_Y$  heißen *Randdichten*).

### 16.5.3 Satz

Es seien  $X$  und  $Y$  **unabhängige** Zufallsgrößen mit den Verteilungsfunktionen  $F_X$  und  $F_Y$ . Für die Verteilungsfunktion  $F$  des Zufallsvektors  $(X, Y)$  gilt

$$F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y).$$

Besitzen  $X$  und  $Y$  eine Dichte  $p_X$  und  $p_Y$ , so besitzt auch  $(X, Y)$  eine Dichte  $p$ , für die gilt:

$$p(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

### 16.5.4 Beispiele

- (a) Untersuchung von Stellringen; zwei Merkmale: Dicke und Bohrung. Es wird festgestellt, ob die Maße innerhalb der Toleranzgrenze liegen oder nicht. Die Zufallsgröße  $X$  sei gleich 0, wenn die Dicke innerhalb der Toleranzgrenze liegt, andernfalls gleich 1. Analog für  $Y$  (Bohrung). Damit kann der Zufallsvektor  $(X, Y)$  die Wertepaare  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ .

Aus Erfahrung weiß man, daß:

- etwa 5% aller Stellringe sind Ausschuß, davon
- 1% falsche Bohrung und falsche Dicke
- 3% nur falsche Bohrung
- 1% nur falsche Dicke.

Verteilung von  $(X, Y)$ :

$$\begin{aligned} P(X = 0, Y = 1) &= 0,03, P(X = 1, Y = 0) = 0,01, \\ P(X = 0, Y = 0) &= 0,01, P(X = 0, Y = 0) = 0,95. \\ 0,98 &= P(X = 0), 0,02 = P(X = 1) \\ 0,96 &= P(Y = 0), 0,04 = P(Y = 1) \end{aligned}$$

$Y \setminus X$	0	1	$\Sigma$
0	0,95	0,01	0,96
1	0,03	0,01	0,04
$\Sigma$	0,98	0,02	<b>1</b>

(b) Werfen mit 2 Würfeln.

$X := 0$  wenn die Augenzahl des 1. Würfels gerade ist, sonst 1.

$Y := 0$  wenn die Augenzahl des 2. Würfels gerade ist, sonst 1.

Der Zufallsvektor  $(X, Y)$  kann die Wertepaare  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$  annehmen. Aus der Unabhängigkeit folgt:

$Y \setminus X$	0	1	$\Sigma$
0	1/4	1/4	1/2
1	1/4	1/4	1/2
$\Sigma$	1/2	1/2	<b>1</b>

### 16.5.5 Berechnung der Kovarianz $\varrho(X, Y)$

Die Verteilung  $(X, Y)$  ist gegeben durch:

$Y \setminus X$	2	3	4	$\Sigma$
2	0,14	0,05	0,01	0,20
3	0,10	0,40	0,15	0,65
4	0,04	0,03	0,08	0,15
$\Sigma$	0,28	0,48	0,24	<b>1</b>

$$\varrho_{XY} = \frac{E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

$$E(X) = 2 \cdot 0,28 + 3 \cdot 0,48 + 4 \cdot 0,24 = 2,96$$

$$E(X^2) = 2^2 \cdot 0,28 + 3^2 \cdot 0,48 + 4^2 \cdot 0,24 = 9,05$$

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - E(X)^2 = 9,05 - 2,96^2 = 0,3475$$

Analog  $E(Y)$ ,  $\sigma_Y^2 \dots$

$$E(X \cdot Y) = 2 \cdot 2 \cdot 0,14 + 2 \cdot 3 \cdot 0,15 + 3 \cdot 2 \cdot 0,10 + \dots + 4 \cdot 4 \cdot 0,08 = 8,90$$

$$\varrho(X, Y) \approx 0,396$$

## 16.6 Der Zentrale Grenzwertsatz

### 16.6.1 Satz

Es sei  $X_1, X_2, \dots$  eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen mit dem gemeinsamen Erwartungswert  $E$  und der gemeinsamen Varianz  $\sigma^2$ . Dann konvergieren die Verteilungsfunktionen  $F_n$  der standardisierten Zufallsgrößen  $Y_n$  mit

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n \cdot \mu}{\sigma \cdot \sqrt{n}}$$

gegen die Verteilungsfunktion der  $N(0, 1)$ -Verteilung, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Y_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

Die Summe  $X_1 + \dots + X_n$  ist näherungsweise normalverteilt für große  $n$ .

# Kapitel 17

## Partielle Differentialgleichungen

**Literatur:** W. A. Strauss: Partielle Differentialgleichungen (Vieweg)

### 17.1 Grundbegriffe, Beispiele

#### 17.1.1

Bei *partiellen Differentialgleichungen* ist die gesuchte, unbekannte Funktion  $u$  eine Funktion von mehreren Variablen  $x, y, \dots$

Eine *partielle Differentialgleichung* (PDgl) ist eine Gleichung, welche die Variablen, die gesuchte Funktion  $u$  und deren **partiellen Ableitungen** in Beziehung setzt. Die allgemeine Form einer PDgl *erster Ordnung* in 2 Variablen ist

$$F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) = F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

mit einer gewissen Funktion  $F$ . Die *Ordnung* einer PDgl ist der Grad der höchsten auftretenden Ableitung. Die allgemeine Form einer PDgl *zweiter Ordnung* in 2 Variablen ist

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$$

Hat die obige Differentialgleichung die Form

$$a_1(x, y) \cdot u(x, y) + a_2(x, y) \cdot u_x(x, y) + \dots + a_6(x, y) \cdot u_{yy}(x, y) = g(x, y)$$

so heißt sie *linear*. Sind die  $a_j$  konstant, so heißt die PDgl eine *lineare partielle Differentialgleichung* mit *konstanten Koeffizienten*. Im Falle  $g = 0$  heißt die Gleichung *homogen*. Analog definiert man diese Begriffe für Gleichungen beliebiger Ordnung.

#### 17.1.2 Beispiele (aus der Physik)

- (i)  $u_x + u_y = 0$  (Transport) Ordnung 1, lineare konstante Koeffizienten
  - (ii)  $u_x + y \cdot u_y = 0$  (Transport) Ordnung 1, lineare, nicht konstante Koeffizienten
  - (iii)  $u_x + u \cdot u_y = 0$  (Stoßwelle), Ordnung 1, nicht linear
  - (iv)  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  (Laplace-Gleichung), Ordnung 2, linear, konstante Koeffizienten
  - (v)  $u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0$  (Welle mit Rückkopplung), Ordnung 2
  - (vi)  $u_t + u \cdot u_x + u_{xxx} = 0$  (Dispersionsgleichung), Ordnung 3, nicht linear
  - (vii)  $u_{tt} + u_{xxxx} = 0$  (Schwingender Stab), Ordnung 4, konstante Koeffizienten
- (in diesen Gleichungen:  $u = u(x, y)$  bzw.  $u = u(x, t)$ )

Genau wie bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen gilt: Sind  $u_1, \dots, u_n$  Lösungen einer homogenen linearen PDgl, so ist auch jede Linearkombination

$$c_1 \cdot u_1 + \dots + c_n \cdot u_n \quad (c_j \text{ Konstanten})$$

eine Lösung. Weiterhin erhält man die allgemeine Lösung einer inhomogenen PDgl, wenn man zu der allgemeinen Lösung der homogenen PDgl eine Lösung der inhomogenen PDgl addiert.

### 17.1.3 Einige Beispiele für die Lösung von partiellen Differentialgleichungen

Zur Erinnerung: Bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung der Ordnung  $m$  enthält die allgemeine Lösung  $m$  beliebige Konstanten.

(a)  $u_{xx} = 0 \quad (u = u(x, y))$

$\Rightarrow u_x$  ist konstant, genauer gesagt,  $u_x$  hängt nicht von  $x$  ab  $\Rightarrow u_x = f(y)$  wobei  $f$  eine beliebige Funktion ist.

Integration nach  $x$ :  $u = x \cdot f(y) + g(y)$  wobei  $g$  eine beliebige Funktion ist. In der allgemeinen Lösung treten also **2 beliebige Funktionen** auf.

(b)  $u_{xx} + u = 0$  Wie in Beispiel (a) handelt es sich eigentlich um eine **gewöhnliche** Differentialgleichung mit einer zusätzlichen Variablen  $y$  (lin. Dgl. zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten). Nach (14.4.2) ist die allgemeine Lösung  $u(x, y) = f(y) \cdot \cos x + g(y) \cdot \sin x$  ( $f$  und  $g$  beliebige Funktionen).

(c)  $u_{xy} = 0$  Zuerst integrieren wir nach  $x$  und betrachten  $y$  als Konstante:  $u_y(x, y) = f(y)$ . Dann integrieren wir nach  $y$  und betrachten  $x$  als Konstante:  $u(x, y) = F(y) + g(x)$  wobei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  ist und  $g$  eine beliebige differenzierbare Funktion ist.

Die allgemeine Lösung einer PDgl enthält beliebig wählbare **Funktionen**.

### 17.1.4 Die Diffusionsgleichung

Wir betrachten eine ruhende Flüssigkeit in einem Behälter und einen Farbstoff, der durch die Flüssigkeit diffundiert. Einfache Diffusion wird durch das folgende Gesetz beschrieben:

- (a) Der Farbstoff bewegt sich von Bereichen höherer zu Bereichen niedrigerer Konzentration
- (b) Die transportierte Masse pro Zeiteinheit ist proportional zum Gradienten der Konzentration

Sei  $u(x, y, z, t)$  die Konzentration (Masse pro Volumeneinheit) des Farbstoffs an der Stelle  $(x, y, z)$  zum Zeitpunkt  $t$ . Mit Hilfe des obigen Gesetzes kann man zeigen:

$u_t = k \cdot (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = k \cdot \Delta u$	<i>dreidimensionale Diffusionsgleichung</i>
---	---

mit einer Konstanten  $k$ . Ist der Behälter eine lange Röhre, so kann man die Diffusion durch die *eindimensionale Diffusionsgleichung*  $u_t = k \cdot u_{xx}$  beschreiben. Ist  $k$  ortsabhängig und sind Quellen/Senken des Farbstoffes vorhanden, so gilt

$$u_t = \nabla \cdot (k \cdot \Delta u) + f \quad (f = f(x, y, z), k = k(x, y, z))$$

**Anwendungen:** Wärmeleitung, Brownsche Molekularbewegung, Populationsdynamik



### 17.1.5 Wellengleichung

Wir betrachten eine biegsame, elastische, homogene Saite der Länge  $l$ , welche geringfügigen Transversalschwingungen unterworfen ist (z.B. Gitarrensaite).  $u(x, t)$  sei die Auslenkung aus der Nulllage zur Zeit  $t$  an der Stelle  $x$ . Unter gewissen vereinfachenden Annahmen gilt die *eindimensionale Wellengleichung*

$$u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}$$

mit einer Konstanten  $c$  (die Wellengeschwindigkeit). Das zweidimensionale Analogon der Saite: eine biegsame, elastische, homogene Membran, welche über einen Rahmen gespannt ist. Liegt die Membran in der  $x, y$ -Ebene und bezeichnet  $u(x, y, t)$  die vertikale Auslenkung eines Punktes zur Zeit  $t$ , so gilt

$$u_{tt} = c^2 \cdot (u_{xx} + u_{yy}) \quad \text{zweidimensionale Wellengleichung}$$

Einfache dreidimensionale Schwingungen erfüllen die Gleichung

$$u_{tt} = c^2 \cdot (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$$

**Anwendungen:** Schallwellen in der Luft, Schwingungen eines elastischen Körpers, elektromagnetische Wellen, seismische Wellen.

### 17.1.6 Die Laplace-Gleichung

Betrachtet man **stationäre** Wellen oder Diffusionen (d.h.  $u_t = u_{tt} = 0$ , die physikalischen Verhältnisse ändern sich nicht mit der Zeit) so gilt:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \Delta u = 0 \quad \text{Laplace-Gleichung}$$

Die Lösungen heißen *harmonische Funktionen*.

### 17.1.7 Die Poisson-Gleichung

Die inhomogene Gleichung

$$\Delta u = f$$

mit einer gegebenen Funktion  $f$  heißt *Poisson-Gleichung*.

**Beispiele:**

- (i) Elektrostatik: Sei  $\vec{E}$  ein elektrisches Feld geladener Teilchen mit Ladungsdichte  $\rho$ . Nach den Maxwell'schen Gleichungen ist  $\vec{E}$  wirbelfrei, d.h.  $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$  und  $\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$ .

Wegen der ersten Gleichung existiert eine skalare Funktion  $\Psi$  (elektrisches Potential) mit  $\vec{E} = -\text{grad } \Psi \Rightarrow \Delta \Psi = \text{div}(\text{grad } \Psi) = -\text{div}(\vec{E}) = -4\pi\rho$ .

$$\Delta \Psi = -4\pi\rho \quad \text{Poisson-Gleichung}$$

- (ii) Holomorphe Funktionen (komplex): Ist  $f(x + iy) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$  eine holomorphe Funktion, so gilt  $\Delta u = \Delta v = 0$ .

## 17.2 Lineare Gleichungen erster Ordnung

### 17.2.1 Gleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wir lösen die Gleichung  $a \cdot u_x + b \cdot u_y = 0$  ( $u = u(x, y)$ ), wobei  $a$  und  $b$  Konstanten sind ( $\neq 0$ ).

**Geometrische Methode:**  $au_x + bu_y$  ist die Richtungsableitung von  $u$  in Richtung des Vektors  $(a, b)$ . Folglich ist  $u$  konstant entlang einer beliebigen Geraden mit Richtungsvektor  $(a, b)$ . Für diese Geraden ist  $(-b, a)$  ein Normalenvektor, deshalb haben sie die Gleichung  $bx - ay = c$  mit einer Konstanten  $c$ .

Den Wert von  $u$  auf dieser Geraden bezeichnen wir mit  $f(c)$ . Dann gilt:

$$u(x, y) = f(\underbrace{bx - ay}_c)$$

für alle  $x, y$ .

**Koordinaten-Methode:** Wir führen die neuen Variablen  $s = ax + by, t = bx - ay$  ein (*lineare Transformation der unabhängigen Variablen*). Nach der Kettenregel erhalten wir:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = a \cdot u_s + b \cdot u_t \quad \text{und} \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = b \cdot u_s - a \cdot u_t$$

$$\Rightarrow 0 = a \cdot u_x + b \cdot u_y = a \cdot (a \cdot u_s + b \cdot u_t) + b \cdot (b \cdot u_s - a \cdot u_t) = (a^2 + b^2) \cdot u_s \quad \Rightarrow \quad u_s = 0$$

**Lösung:**  $u(s, t) = f(t) = f(bx - ay)$ , d.h.

$$u(x, y) = f(bx - ay)$$

wobei  $f$  eine beliebige differenzierbare Funktion ist.

## 17.2.2 Gleichungen mit variablen Koeffizienten

**Beispiel:**  $u_x + y \cdot u_y = 0$ . Geometrische Methode: Die Richtungsableitung in Richtung des Vektors  $(1, y)$  ist 0. Die Kurven  $y = y(x)$  in der  $x, y$ -Ebene mit  $(1, y)$  als Tangentenvektoren haben die Steigung  $y' = \frac{y}{1}$ . Diese gewöhnliche Differentialgleichung hat die Lösungen  $y = C \cdot e^x$  ( $C \in \mathbb{R}$ ). Das sind die sogenannten *Charakteristiken* der PDgl. Wenn  $C$  variiert, füllen die Kurven die Ebene vollständig aus.

Auf jeder dieser Kurven ist  $u$  konstant:

$$\frac{d}{dx}u(x, C \cdot e^x) = u_x \cdot 1 + u_y \cdot C \cdot e^x = u_x + y \cdot u_y = 0$$

Der Funktionswert  $u(x, y) = u(x, C \cdot e^x)$  hängt also nur von  $C = e^{-x}y$  ab  $\Rightarrow$  die allgemeine Lösung der PDgl ist

$$u(x, y) = f(e^{-x}y)$$

wobei  $f$  eine beliebige differenzierbare Funktion ist.

Die geometrische Methode läßt sich allgemein für Gleichungen der Form  $a(x, y) \cdot u_x + b(x, y) \cdot u_y = 0$  anwenden: Zuerst löst man die gewöhnliche Differentialgleichung  $y' = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}$  ( $y = y(x)$ ). Jede Lösung  $u$  der PDgl ist konstant auf den Lösungskurven dieser Gleichung.

## 17.3 Anfangs- und Randbedingungen

### 17.3.1

Lösungen von PDgl-en hängen von beliebigen Funktionen ab. Will man eine eindeutig bestimmte Lösung erhalten, sind Zusatzbedingungen erforderlich. Diese Bedingungen sind häufig physikalisch motiviert.

**Anfangsbedingungen:** Eine *Anfangsbedingung* legt den physikalischen Zustand eines Systems zu einem festen Zeitpunkt  $t_0$  fest.

**Beispiel:** Diffusionsgleichung, Anfangsbedingung

$$u(x, y, z, t_0) = \Psi(x, y, z)$$

wobei  $\Psi$  eine gegebene Funktion ist (z.B. Anfangskonzentration, Anfangstemperatur).

**Beispiel:** Wellengleichung, Anfangsbedingung

$$u(x, y, z, t_0) = \Psi(x, y, z), \quad u_t(x, y, z, t_0) = \Phi(x, y, z)$$

$\Psi \dots$  Anfangslage,  $\Phi \dots$  Anfangsgeschwindigkeit

**Randbedingungen:** PDgl-en gelten in einem bestimmten Gebiet  $D$ :

schwingende Saite:  $D = (0, l)$ , der Rand besteht aus den Punkten 0 und  $l$ .

schwingende Membran:  $D$  ist ein ebener Bereich, der Rand ist eine geschlossene Kurve.

diffundierende Substanz:  $D$  ist der Behälter, sein Rand ist die Oberfläche des Behälters.

Um die Lösung festzulegen, ist es nötig, einige *Randbedingungen* zu stellen. Die drei wichtigsten Arten von Randbedingungen sind:

- (i)  $u$  wird vorgegeben (*Dirichlet-Bedingung*)
- (ii)  $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$  wird vorgegeben (*Neumann-Bedingung*),  $\vec{n}$  bezeichnet den Normalenvektor der Länge 1, der ins Äußere von  $D$  zeigt.
- (iii)  $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + a \cdot u$  wird vorgegeben (*Robin-Bedingung*), ( $a = a(x, y, z, t)$ )

Jede Bedingung soll gelten für **alle t** und für **alle Randpunkte**  $(x, y, z) \in D$ .

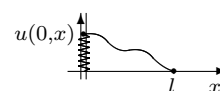
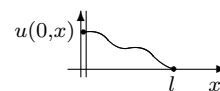
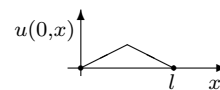
**Bemerkung:** Mit  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = n_1 \cdot u_x + n_2 \cdot u_y + n_3 \cdot u_z = \vec{n} \cdot \nabla u$ .

Bei eindimensionalen Problemen, wo  $D$  ein Intervall  $0 < x < l$  und der Rand nur aus den Randpunkten des Intervalls besteht, haben die Randbedingungen folgende Form:

- (i)  $u(0, t) = g(t)$ ,  $u(l, t) = h(t)$
- (ii)  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = g(t)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = h(t)$
- (iii) analog

**Beispiel:** Schwingende Saite

- (a) Die Enden der Saite sind fixiert (z.B. Gitarrensaiten). Dann liegt eine Dirichlet-Bedingung  $u(0, t) = u(l, t) = 0$  vor (eine homogene).
- (b) Ein Saitenende (z.B. bei  $x = 0$ ) wird reibungsfrei transversal in einer Spur geführt, ohne Widerstand. An diesem Ende herrscht keine transversale Spannungskraft  $\Rightarrow$  Neumann-Bedingung:  $u_x(0, t) = 0$ .
- (c) Die Robin-Bedingung wäre die Randvorgabe für den Fall, daß ein Saitenende in einer Spur geführt wird, aber an einer Feder befestigt ist. Hooksches Gesetz: Spannung proportional zur Auslenkung:  $u_x(0, t) + a \cdot u(0, t) = 0$  mit einer gewissen Konstanten  $a$ .



**Bemerkung:** Es gibt noch z.B. *Sprungbedingungen*, *Bedingungen im Unendlichen*:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \dots = \dots$

### 17.3.2 Korrekt gestellte Probleme

Wird ein physikalisches Problem durch eine PDgl beschrieben, so versucht man, physikalisch sinnvolle Zusatzbedingungen zu stellen, so daß ein sog. *korrekt gestelltes Problem* entsteht:

- (i) Die Gleichung hat **genau eine** Lösung (zu viele Zusatzbedingungen: keine Lösung, zu wenige Zusatzbedingungen: unendlich viele Lösungen, *unterbestimmtes* Problem)
- (ii) *Stabilität*: Die Lösung hängt stetig von den Anfangs- bzw. Randbedingungen ab.

## 17.4 Typeinteilung von Gleichungen zweiter Ordnung

Wir betrachten die PDgl

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \cdot u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^n b_i \cdot u_{x_i} + c \cdot u = f \quad (1)$$

in  $n$  Variablen  $x_1, \dots, x_n$  (mit konstanten Koeffizienten). Wegen  $u_{x_i x_k} = u_{x_k x_i}$  können wir die  $a_{ik}$  so wählen, dass  $a_{ik} = a_{ki}$ , z.B.  $1 \cdot u_{x_1 x_4} + 3 \cdot u_{x_4 x_1} = 2 \cdot u_{x_1 x_4} + 2 \cdot u_{x_4 x_1}$ .

Dann ist die Matrix  $A = (a_{ik})_{i,k=1}^n$  symmetrisch. Folglich besitzt die Matrix  $A$  dann genau  $n$  Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

### 17.4.1 Definition

Die Gleichung (1) heißt

- (i) *elliptisch*, wenn alle Eigenwerte von  $A$  positiv oder alle negativ sind.
- (ii) *hyperbolisch*, wenn keiner der Eigenwerte gleich 0 ist, und genau einer ein anderes Vorzeichen als die anderen hat.
- (iii) *parabolisch*, wenn genau ein Eigenwert gleich 0 ist und alle anderen dasselbe Vorzeichen besitzen.

### 17.4.2 Beispiele

- (a) zweidimensionale Laplace-Gleichung:  $1 \cdot u_{xx} + 1 \cdot u_{yy} = 0$ , ( $u = u(x, y)$ ).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \left. \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{elliptische Gleichung}$$

(Bemerkung: Ist  $A$  eine Diagonalmatrix, so stehen die Eigenwerte in der Hauptdiagonalen, die Spalten von  $A$  bilden ein vollständiges System von Eigenvektoren.)

- (b) Für die eindimensionale Wellengleichung  $u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}$ , ( $u = u(x, t)$ ) bzw.  $c^2 \cdot u_{xx} - u_{tt} = 0$  (mit  $c \neq 0$ ) ist

$$A = \begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \left. \begin{array}{l} \lambda_1 = c^2 > 0 \\ \lambda_2 = -1 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{hyperbolische Gleichung}$$

- (c) Wärmeleitungsgleichung in einer Dimension, ( $x = x(x, t)$ ):  $u_t = u_{xx} \Rightarrow u_{xx} - u_t$  ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \left. \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 > 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{parabolische Gleichung}$$

### 17.4.3 Lineare Transformation der unabhängigen Variablen

Wir betrachten die Gleichung (1) und die zugehörige **symmetrische** Matrix  $A$ . Nach einem Satz der linearen Algebra gibt es  $n$  normierte, paarweise orthogonale Eigenvektoren  $v_j \in \mathbb{R}^n$  ( $j = 1, \dots, n$ ), d.h., es gilt  $A \cdot v_j = \lambda_j \cdot v_j$  ( $\lambda_j$ : Eigenwert).

Bilden wir aus den Eigenvektoren spaltenweise die Matrix  $Q = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ , so ist  $Q^T \cdot A \cdot Q$  eine Diagonalmatrix, in der Hauptdiagonalen stehen die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

Führt man die neuen Variablen  $y = (y_1, \dots, y_n)^T$  durch  $y = Q^T \cdot x$  (*lineare Variablentransformation*) ein, wobei  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ , so erhält man für die neuen Variablen eine PDgl, deren zugehörige Matrix eine **Diagonalmatrix** ist (d.h. keine gemischten Ableitungen  $u_{y_i y_j}$  mit  $i \neq j$ ).

## 17.5 Wellen und Diffusionen

### 17.5.1 Die Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}$$

(man kann sich eine sehr lange Saite vorstellen) Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct) \quad (1)$$

wobei  $f$  und  $g$  beliebige (zweimal differenzierbare) Funktionen sind. (Durch Variablentransformation  $y = x + ct$ ,  $s = x - ct$  kann man die Gleichungen auf eine Gleichung der Form  $u_{ys} = 0$  zurückführen, siehe Übung.)

Wir stellen die Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \Psi(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Mit  $t = 0$  in (1) erhalten wir

$$\varphi(x) = f(x) + g(x) \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \text{ nach } t \text{ ableiten und dann } t = 0 \text{ setzen: } \Psi(x) = c \cdot f'(x) - c \cdot g'(x) \\ (2) \text{ nach } x \text{ ableiten: } \varphi'(x) = f'(x) + g'(x) \end{array} \right\} \text{LGS für } f', g'$$

Aus diesen Gleichungen kann man leicht  $f'$ , und  $g'$ , dann  $f$  und  $g$  und damit  $u$  bestimmen.

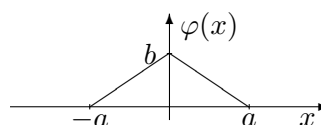
$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \Psi(s) ds$$

(Lösungsformel von d'Alambert, 1746)

### 17.5.2 Beispiel

Wir betrachten eine unendlich lange, homogene Saite mit der Wellengeschwindigkeit  $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$  ( $\rho$  ist die Dichte und  $T$  der Betrag des Spannungsvektors, beide konstant), der Anfangsauslenkung

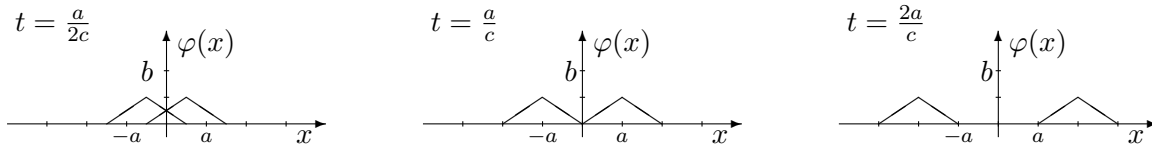
$$\varphi(x) = \begin{cases} b \cdot \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$



und der Anfangsgeschwindigkeit  $\Psi(x) = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

Anschaulich: Zupfen an der Saite mit drei Fingern, die die Saite gleichzeitig loslassen  
 Lösungsformel von d'Alambert:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)]$$



Im folgenden betrachten wir die eindimensionale Diffusionsgleichung

$$u_t = k \cdot u_{xx}$$

### 17.5.3 Satz (Maximum-Prinzip)

Wenn  $u(x, t)$  die Diffusionsgleichung in einem Raum-Zeit-Rechteck

$$\{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$$

erfüllt, so wird der maximale (bzw. minimale) Wert von  $u(x, t)$  entweder auf der Anfangslinie  $t = 0$  oder auf den Seitenlinien  $x = 0$  oder  $x = l$  angenommen.

**Interpretation/Wärmeströmung:** Bei einem erwärmten Stab ohne innere Wärmequelle kann man die heißeste und die kälteste Stelle nur zum Anfangszeitpunkt oder an einem der beiden Stabenden finden.

### 17.5.4 Folgerung (Eindeutigkeit des Dirichlet-Problems)

Die Gleichung  $u_t - ku_{xx} = f(x, t)$ ,  $0 < x < l$ ,  $t > 0$  mit den Anfangs- und Randbedingungen

$$u(x, 0) = \Psi(x), \quad u(0, t) = g(t), \quad u(l, t) = h(t)$$

besitzt höchstens eine Lösung

**Beweis:** Sind  $u_1$  und  $u_2$  Lösungen, so gilt für  $w = u_1 - u_2$ :  $w_t - k \cdot w_{xx} = 0$ ,  $w(0, t) = 0$ ,  $w(l, t) = 0$ ,  $w(x, 0) = 0$  nach dem Maximum-Prinzip nimmt  $w$  Maximum und Minimum auf dem unteren Rand oder den Seiten an, dort wo  $w$  verschwindet.  $\Rightarrow w = 0$ , also  $u_1 = u_2$ .

### 17.5.5 Die Diffusionsgleichung auf der ganzen Achse

$$u_t = k \cdot u_{xx} \quad (-\infty < x \leq \infty, 0 < t < \infty) \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \Psi(x) \quad (2)$$

Die Gleichung (1) hat die folgenden *Invarianzeigenschaften*:

- (a) Die Verschiebung  $u(x - y, t)$  einer Lösung  $u(x, t)$  ist für jedes  $y$  eine weitere Lösung.
- (b) Jede partielle Ableitung einer Lösung ist wieder eine Lösung.
- (c) Ist  $u(x, t)$  eine Lösung, so auch  $u(\sqrt{a}x, at)$  für jedes  $a > 0$ .
- (d) Linearkombination von Lösungen ist eine Lösung.

(e) Ist  $S(x, t)$  eine Lösung, so auch

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t) \cdot g(y) dy$$

für jede Funktion  $g$ , sofern das Integral eine zweimal differenzierbare Funktion darstellt (s. Übungsaufgabe).

## 17.5.6 Satz

Ist  $\Psi$  eine stetige und beschränkte Funktion, so ist die Funktion

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \cdot \Psi(y) dy$$

beliebig oft differenzierbar und sie ist die einzige Lösung von (17.5.5.1) und (17.5.5.2).

Die Funktion  $S(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4kt}}$  heißt *Diffusionsterm* oder *Quellfunktion*.

**Bemerkung:** Mit der Substitution  $s = \frac{x-y}{\sqrt{kt}}$  in (17.5.6) erhalten wir

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4}} \Psi(x - s\sqrt{kt}) ds$$

in dieser Gleichung kann man direkt  $t = 0$  einsetzen und die Bedingung  $u(x, 0) = \Psi(x)$  nachprüfen.

## 17.6 Randwertprobleme, Trennung der Variablen

### 17.6.1 Wellengleichung, Dirichlet-Bedingung

Wir betrachten die Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty \quad (17.3)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (17.4)$$

unter den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = \Phi(x), \quad u_t = \Psi(x)$$

Die Lösungsmethode besteht darin, die allgemeine Lösung als Linearkombination von leicht zu findenden speziellen Lösungen aufzubauen.

Unter einer *getrennten Lösung* verstehen wir eine Lösung der Form

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

Wir setzen diese Funktion in (17.3) ein:

$$\begin{aligned} X(x) \cdot T''(t) &= c^2 \cdot X''(x) \cdot T(t) \\ -\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} &= -\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \end{aligned}$$

$\lambda$  konstant, wegen des 1. Ausdrucks ist  $\lambda$  unabhängig von  $x$ , wegen des 2. Ausdrucks ist  $\lambda$  unabhängig von  $t$ .

Aus den Randbedingungen folgt:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \quad (17.5)$$

Hieraus und aus der Gleichung  $X'' + \lambda \cdot X = 0$  folgt, daß  $\lambda > 0$  (Übungsaufgabe).

Wir können also  $\lambda$  in der Form  $\lambda = \beta^2$  mit  $\beta > 0$  schreiben. Dann sind die obigen Gleichungen ein Paar von getrennten Gleichungen für  $X$  und  $T$ :

$$X'' + \beta^2 X = 0, \quad T'' + \beta^2 T = 0$$

Ihre Lösungen haben die Gestalt

$$T(t) = A \cdot \cos \beta ct + B \cdot \sin \beta ct \quad (17.6)$$

$$X(x) = C \cdot \cos \beta x + D \cdot \sin \beta x \quad (17.7)$$

wobei  $A, B, C, D$  beliebige Konstanten sind. Wegen (17.5) gilt  $0 = X(0) = C$ ,  $0 = X(l) = D \cdot \sin \beta l \Rightarrow D = 0$  oder  $\beta = \frac{n\pi}{l}$ , ( $n = 1, 2, \dots$ )

Für jedes  $n$  erhalten wir folgende getrennte Lösung von (17.3) und (17.4):

$$u_n(x, t) = \left( A_n \cdot \cos \frac{n\pi ct}{l} + B_n \cdot \sin \frac{n\pi ct}{l} \right) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}$$

mit den beliebigen Konstanten  $A_n$  und  $B_n$  (die auch  $D$  enthalten). Die Summe von Lösungen ist wieder eine Lösung, also ist auch die unendliche Reihe

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cdot \cos \frac{n\pi ct}{l} + B_n \cdot \sin \frac{n\pi ct}{l} \right) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (17.8)$$

eine Lösung, vorausgesetzt, sie konvergiert und stellt eine zweimal differenzierbare Funktion dar. Diese Lösung erfüllt genau dann die Anfangsbedingung, wenn

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} = \Phi(x) \quad \text{und} \quad u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} \cdot B_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} = \Psi(x)$$

Die Lösungsmethode ist also: Man entwickelt die gegebenen Funktionen  $\Phi$  und  $\Psi$  in Fouriersche Sinusreihen (Abschnitt 13.3) und setzt die Koeffizienten  $A_n$  und  $B_n$  in (17.8) ein.

## 17.6.2 Diffusionsgleichung, Dirichlet-Bedingung

Wir betrachten die homogene Gleichung

$$u_t = k \cdot u_{xx} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty \quad (17.9)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (17.10)$$

unter der Anfangsbedingung  $u(x, 0) = \Psi(x)$ .

Wie in (17.6.1) trennen wir die Variablen:  $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$  und erhalten:

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad (\lambda \text{ konstant})$$

$T$  genügt also der Gleichung  $T' = -\lambda k T \Rightarrow T(t) = A \cdot e^{-\lambda kt}$ .

Für  $X$  gelten wie in (17.6.1)

$$X'' + \lambda \cdot X = 0, \quad X(0) = X(l) = 0 \quad \Rightarrow \lambda > 0, \text{ wie in (17.6.1)}$$



Wegen der Gestalt von  $T(t)$  erhalten wir, dass die Funktion

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \cdot kt} \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Lösung der Diffusionsgleichung ist. Sie erfüllt genau dann die Anfangsbedingung, wenn

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}$$

**Bemerkung:**  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$ .

**Physikalische Interpretation:** Diffundierende Substanz in einer Röhre der Länge  $l$ , deren beiden Enden in einen sehr großen, **leeren** Behälter münden. Dann ist die Konzentration  $u(x, t)$  an jedem Ende 0.  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$ : die Substanz wird nach und nach in den Behälter entleert.