Systemtheorie I – WS 04/05
Prof. Dr.-Ing. habil. Hoffmann, TU Dresden
Mitschrift

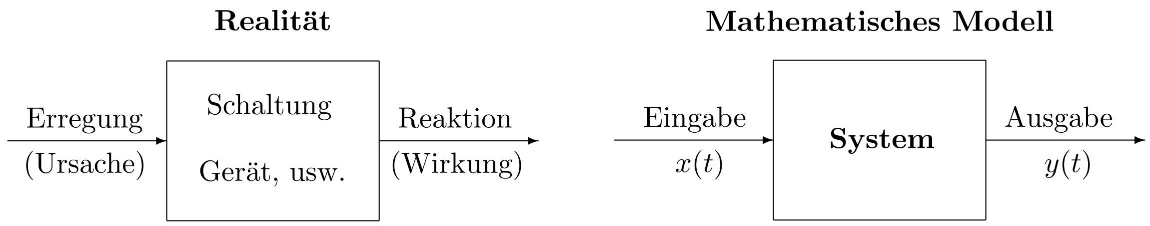
Fabian Kurz
http://fkurz.net/

Zuletzt aktualisiert:
5. Mai 2005

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung

0.1 Inhalt des Lehrgebietes

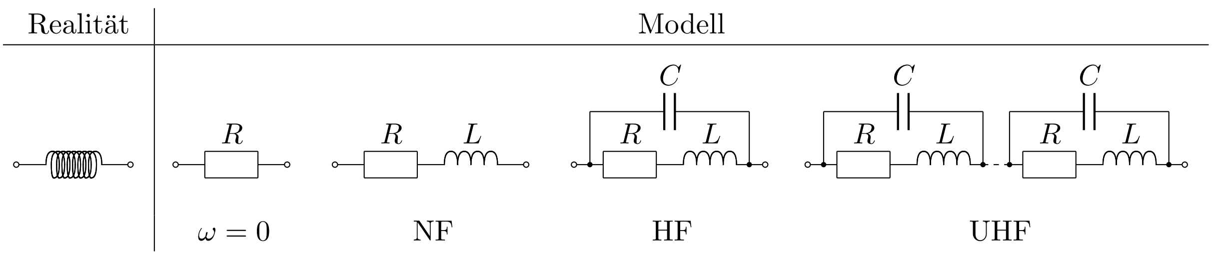


Aufgaben

gegeben	gesucht	Gebiet
Eingabe, System	Ausgabe	Systemanalyse
Eingabe, Ausgabe	System	Systemsynthese
System, Ausgabe	Eingabe	Messtechnik

Beachte: Modell ist anwendungsabhängig

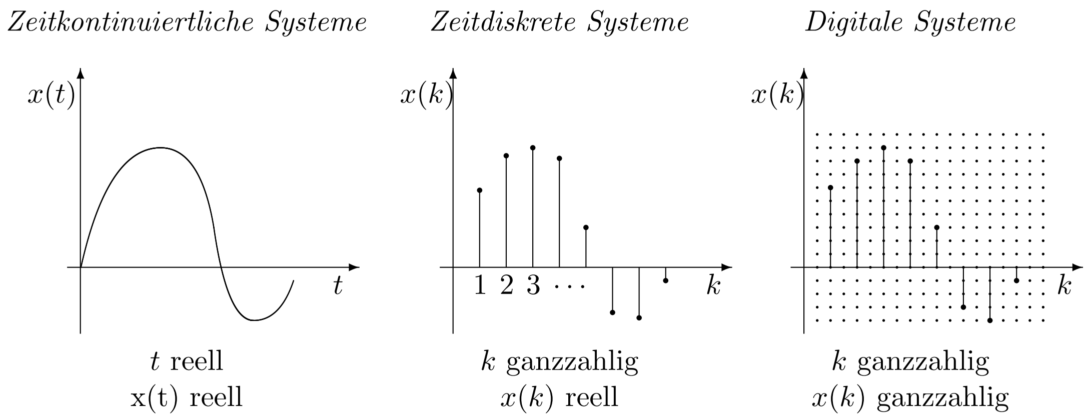
Beispiel: Drahtwiderstand



Eingabe und Ausgabe sind Zeitfunktionen $x(t)$ bzw. $y(t)$ oder sogenannte *Signale*.

0.2 Stoffeinteilung

(nach der Art des verarbeiteten Signals)



0.3 Literatur

Wunsch/Schreiber, „Digitale Systeme“, Verlag Technik / Springer
Wunsch/Schreiber, „Analoge Systeme“, Verlag Technik / Springer

Teil 1: Digitale Systeme

1 Mathematische Grundlagen

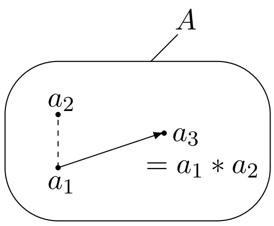
1.1 Algebraische Strukturen

1.1.1 Operation und Struktur

Beispiele:

$3 + 4 = 7$

$\vec{x}_1 \times \vec{x}_2 = \vec{x}_3$



Die Menge A mit der auf ihr definierten Operation „$*$“ bildet eine *algebraische Struktur*, in Zeichen $(A, *)$.

Beispiele:

$(\mathbb{R}, +)$	reelle Zahlen mit Addition
$(\mathbb{Z}, \cdot)$	ganze Zahlen mit Multiplikation

1.1.2 Verallgemeinerungen

a) Träger der Struktur kann auch mehr als eine Menge enthalten

b) Struktur kann auch mehrere Operationen enthalten

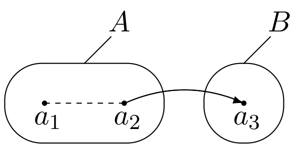
   Beispiele:

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$	reelle Zahlen mit Addition und Multiplikation
$(P(M), \cup, \cap, \overline{})$	Potenzmenge von M mit Vereinigung, Durchschnitt und Komplement

c) Operationen können n–stellig sein

d) Bisher: $a_1 \in A$, $a_2 \in A \longrightarrow a_3 = a_1 * a_2 \in A$ *innere Operation*

   Allgemein: $a_1 \in A$, $a_2 \in A \longrightarrow a_3 = a_1 * a_2 \in B$ *äußere Operation*

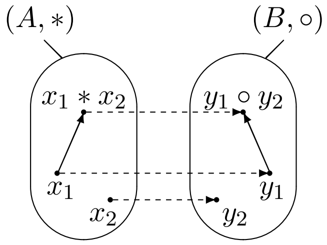


Beispiel: Skalarprodukt zweier Vektoren

$$\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = c$$

1.1.3 Isomorphe Strukturen

Gegeben seien die Strukturen $(A, *)$ und $(B, \circ)$.



Definition: Die Strukturen $(A, *)$ und $(B, \circ)$ heißen *isomorph* (gleichgestaltig), in Zeichen $(A, *) \cong (B, \circ)$, falls eine bijektive Abbildung $\varphi : A \to B$ exisitert, so daß gilt:

$$\boxed{\varphi(x_1 * x_2) = \varphi(x_1) \circ \varphi(x_2) = y_1 \circ y_2}$$

Die Abbildung φ heißt dann *Isomorphismus*.

Beispiel:

$(A, *) = (\mathbb{R}^+, \cdot)$ positive reelle Zahlen mit Multiplikation
$(B, \circ) = (\mathbb{R}, +)$ reelle Zahlen mit Addition

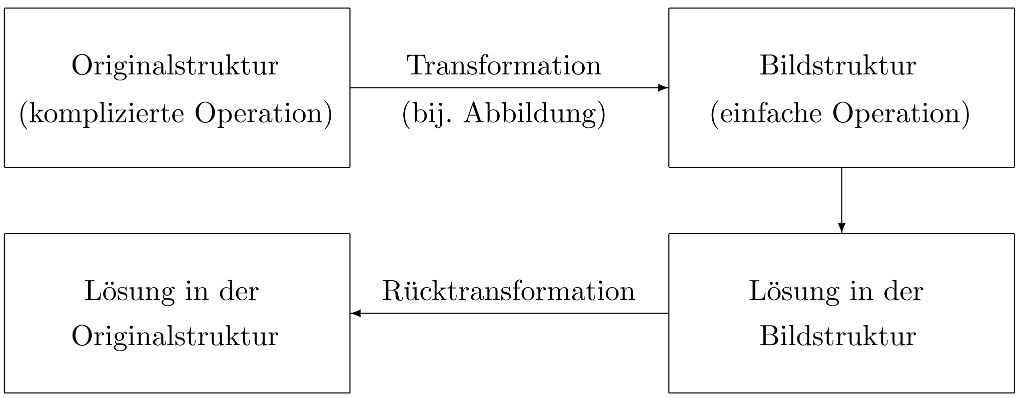
Behauptung: $(\mathbb{R}^+, \cdot) \cong (\mathbb{R}, +)$

Isomorphismus: $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \log x$

Dann gilt: $\varphi(x_1 \cdot x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$, denn $\log(x_1 \cdot x_2) = \log x_1 + \log x_2$

Beachte: Isomorphe Strukturen unterscheiden sich lediglich durch die Bezeichnung der Elemente des Trägers und der Operationen. Ansonsten sind sie formal gleich.

Bedeutung isomorpher Strukturen



Beispiele:

- Logarithmenrechnung
- komplexe Wechselstromrechnung
- Funktionaltransformation (Fourier, Laplace, Z)

1.1.4 Boolesche Algebra

Definition: Die Struktur $(A, *, \circ, \overline{}, e_*, e_\circ)$ heißt Boolesche Algebra, falls gilt:

(a) $*$ und $\circ$ sind assoziativ

(b) $*$ und $\circ$ sind kommutativ

(c) $*$ ist adjunktiv bezüglich $\circ$ und umgekehrt

(d) $*$ ist distributiv bezüglich $\circ$ und umgekehrt

(e) neutrale Elemente $x * e_* = x$, $x \circ e_\circ = x$, $(x \in A)$

(f) einstellige Operation: $x * \overline{x} = e_\circ$, $x \circ \overline{x} = e_*$

Beispiel: Mengenalgebra $(P(M), \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, M)$
Für beliebige $M_1, M_2, M_3 \subset M$ gilt:

(1)	$M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3$	Assoziativgesetz
	$M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cap M_2) \cap M_3$	
(2)	$M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$	Kommutativgesetz
	$M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$	
(3)	$M_1 \cup (M_1 \cap M_2) = M_1$	Adjunktivgesetz
	$M_1 \cap (M_1 \cup M_2) = M_1$	
(4)	$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$	Distributivgesetz
	$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$	
(5)	$M_1 \cup \emptyset = M_1$	neutrale Elemente
	$M_1 \cap M = M_1$	
(6)	$M_1 \cup \overline{M}_1 = M$	Komplementbildung
	$M_1 \cap \overline{M}_1 = \emptyset$	

Jede endliche Boolesche Algebra ist zu einer endlichen Mengenalgebra isomorph.

1.2 Schaltalgebra

1.2.1 Rechenregeln

„Einfachster Sonderfall" einer Booleschen Algebra: $A = \{e_*, e_\circ\}$.

Neue Symbolik: $(A, *, \circ, e_*, \overline{}, e_\circ) \longrightarrow (\mathbb{B}, \vee, \wedge, \overline{}, 0, 1)$
$\vee$: oder–Verknüpfung (Disjunktion), $\wedge$: und–Verknüpfung (Konjunktion), $\overline{}$: Negation
Eine Boolesche Algebra mit zweielementigem Träger heißt *Schaltalgebra.*

Rechenregeln der Schaltalgebra:

1.	$x \vee (y \vee z)$	$=$	$(x \vee y) \vee z$	$x \wedge (y \wedge z)$	$=$	$(x \wedge y) \wedge z$
2.	$x \vee y$	$=$	$y \vee x$	$x \wedge y$	$=$	$y \wedge x$
3.	$x \vee (x \wedge y)$	$=$	x	$x \wedge (x \vee y)$	$=$	x
4.	$x \vee (y \wedge z)$	$=$	$(x \vee y) \wedge (x \vee z)$	$x \wedge (y \vee z)$	$=$	$(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
5.	$x \vee \overline{x}$	$=$	1	$x \wedge \overline{x}$	$=$	0
6.	$x \vee 0$	$=$	x	$x \wedge 1$	$=$	x
7.	$\overline{0}$	$=$	1	$\overline{1}$	$=$	0
8.	$\overline{x \vee y}$	$=$	$\overline{x} \wedge \overline{y}$	$\overline{x \wedge y}$	$=$	$\overline{x} \vee \overline{y}$
9.	$x \vee x$	$=$	x	$x \wedge x$	$=$	x
10.	$x \vee 1$	$=$	1	$x \wedge 0$	$=$	0
11.			$\overline{\overline{x}} = x$			

(1) … (6) entsprechen der Booleschen Algebra, $x \wedge y$ wird oft als xy geschrieben.

Anwendung: Vereinfachung Boolescher Terme

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
y &= (ax \vee \overline{(a \vee \overline{x})})(b \vee 1)c && a,b,c,x,y \in \mathbb{B} = \{0,1\} \\
&= (ax \vee \overline{(a \vee \overline{x})})c && \text{mit Regeln 10 und 6} \\
&= (ax \vee \overline{a}x)c && \text{mit Regeln 8 und 11} \\
&= (a \vee \overline{a})xc && \text{mit Regel 4} \\
&= xc && \text{mit Regeln 5 und 6}
\end{aligned}
$$

Operationstabellen

oder

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

und

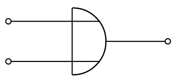
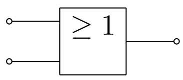
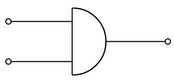
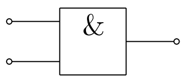
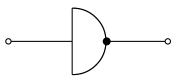
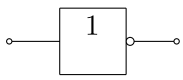
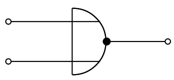
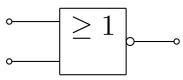
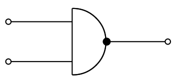
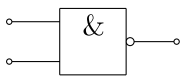
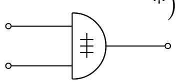
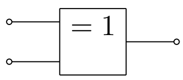
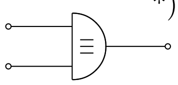
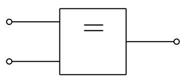
$\vee$	0	1
0	0	0
1	0	1

nicht

$\overline{}$	0	1
	1	0

1.2.2 Gatterschaltungen

Tabelle der Schaltsymbole:

Bezeichnung	**DIN 40700 (alt)**	**DIN 40900 (neu)**
Oder–Gatter		
Und–Gatter		
Negations–Gatter		
NOR–Gatter		
NAND–Gatter		
Antivalenz–Gatter	*) 	
Äquivalenz–Gatter	*) 	

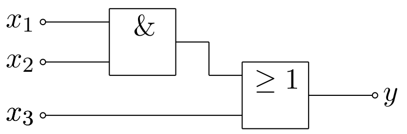
*) nicht genormt

Bemerkungen:

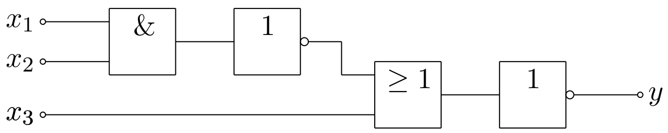
- Die Variablen $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{B}$ heißen Schaltvariablen und bezeichnen die Eingangs– und Ausgangsbelegung eines Gatters
- Jedem Booleschen Term kann eine Gatterschaltung zugeordnet werden

Beispiele

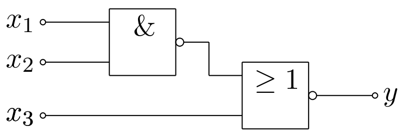
1. Gatterschaltung zum Term $x_1x_2 \vee x_3$:



2. Gatterschaltung zum Term $\overline{\overline{x_1x_2} \vee x_3}$:



einfacher:



3. $x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1x_2 = x_1 \dot{\vee} x_2$ (Antivalenz, Exklusiv–Oder)

4. $x_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 = x_1 \Leftrightarrow x_2$ (Äquivalenz)

1.2.3 Schaltfunktionen

Definition:

Die Abbildung $\boxed{f : \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B};\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y}$ heißt n–stellige Schaltfunktion.

Eigenschaften

I) *Definitionsbereich*:

$$\mathbb{B}^n = \{0,1\}^n = \{\underbrace{(0,0,\ldots,0)}_{n \text{ Elemente}}, (0,0,\ldots,1), \ldots, (1,1,\ldots,1)\}$$

enthält 2^n Elemente.

Wertebereich: $\mathbb{B} = \{0,1\}$

II) Anzahl n–stelliger Schaltfunktionen: $2^{(2^n)}$ (Tabelle s. Formelsammlung)

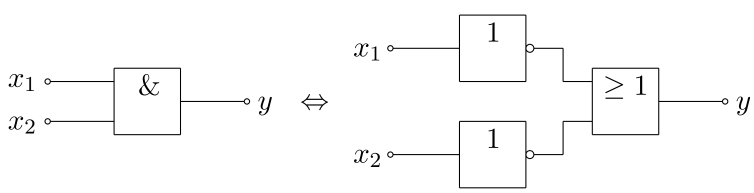
III) In die Rechenregeln der Schaltalgebra (1.2.1) können anstelle der Variablen x, y, z auch Schaltfunktionen f_1, f_2, f_3 eingesetzt werden.

1.2.4 Vollständiges Operationensystem

Das Operationensystem $(\vee, \wedge, \overline{\ })$ ist vollständig d.h. es ist jede beliebige Schaltfunktion damit darstellbar. Frage: Gibt es weitere vollständige Operationensysteme?

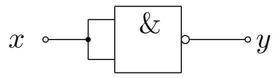
Beispiel 1: $(\vee, \overline{\ })$ ist vollständig, $\wedge$ läßt sich durch $\vee$ ausdrücken:

$x_1x_2 = \overline{\overline{x_1x_2}} = \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}}$

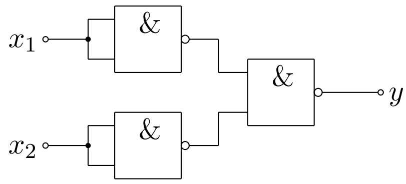


Beispiel 2: ($\uparrow$) ist vollständig, wobei $x_1 \uparrow x_2 = \overline{x_1 x_2}$ (NAND)

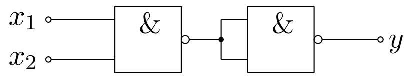
$$\overline{x} = \overline{xx} = x \uparrow x$$



$$x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x_1 \vee x_2}} = \overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2}} = \overline{x_1} \uparrow \overline{x_2} = (x_1 \uparrow x_1) \uparrow (x_2 \uparrow x_2)$$



$$x_1 x_2 = \overline{\overline{x_1 x_2}} = \overline{x_1 \uparrow x_2} = (x_1 \uparrow x_2) \uparrow (x_1 \uparrow x_2)$$



1.3 Darstellung von Schaltfunktionen

1.3.1 Wertetabelle

Beispiel: $n = 3,\ f : \mathbb{B}^3 \longrightarrow \mathbb{B},\ y = f(x_1, x_2, x_3)$

i	x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

Bemerkungen:

- Tabelle beschreibt Schaltbild vollständig
- Es genügt Angabe der Zeilen mit Funktionswert 1
- Einführung *Zeilenenindex* i aus Indexmenge I:

  $$I_f = \{i : f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1\}$$

  mit $i = \text{Bin}(x_1, x_2, \ldots x_n)$

  Für obiges Beispiel: $I_f = \{3, 5, 6\}$.

1.3.2 Boolesche Terme

1. Konstanten 0 und 1 und die Variablen $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind Boolesche Terme
2. Ist B ein Boolescher Term, so auch $\overline{B}$
3. Sind B_1 und B_2 Boolesche Terme, dann auch $B_1 \vee B_2$ sowie $B_1 \wedge B_2$

Beispiel: $B = ((x_1 x_2 \vee \overline{x_3})x_3 \vee 0)1$ (*)

Darstellung einer Schaltfunktion entsprechend (1.3.1): **Wertetabelle**

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Verallgemeinerung: Jeder Boolesche Term mit n Variablen stellt eine n–stellige Struktur dar.

Umkehrung: Jede n–Stellige Struktur $f : \mathbb{B}^n \longrightarrow B$ läßt sich durch einen Booleschen Term darstellen, jedoch *nicht* in eindeutiger Weise

Beispiel: Der Term stellt die gleiche Schaltfunktion dar wie $B = x_1 x_2 x_3$

Definition: Boolesche Terme die die gleiche Schaltfunktion darstellen heißen *äquivalent*.

$\Rightarrow$ Standardisierung durch sogenannte *Normalfunktion*!

1.3.3 Kanonische disjunktive Normalfunktion

Definition: Ein Boolescher Term des Typs

$$m_i = {x_1}^{i_1} \wedge {x_2}^{i_2} \wedge \ldots \wedge {x_n}^{i_n} \qquad \text{mit} \qquad {x_\nu}^{i_\nu} = \begin{cases} \overline{x_\nu} & \text{falls } i_\nu = 0 \\ x_\nu & \text{falls } i_\nu = 1 \end{cases}$$

heißt *Minterm* in n Variablen.

Eigenschaften

1. m_i enthält jede Variable genau einmal und zwar negiert oder nicht negiert
2. Alle Variablen sind konjunktiv verknüpft
3. m_i nimmt für genau eine Belegung der Variablen den Wert 1 and, sonst 0
4. Die Bedeutung des Index von i von m_i: Die Binärdarstellung $\mathrm{Bin}\,(i)$ entspricht der Belegung für die m_i den Wert 1 annimmt

Beispiel: $n = 3$, $m_2 = \overline{x_1}\, x_2\, \overline{x_3} = \begin{cases} 1 & \text{für } x_1 = 0,\, x_2 = 1,\, x_3 = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Darstellungssatz I

$$\boxed{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{i \in I_f} m_i}$$

heißt Darstellung von f in *kanonischer disjunktiver Normalform* (KDNF)

Beispiel: Wertetabelle aus (1.3), $I_f = \{3, 5, 6\}$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \bigvee_{i \in I_f} m_i = m_3 \vee m_5 \vee m_6 = {x_1}^0 {x_2}^1 {x_3}^1 \vee {x_1}^1 {x_2}^0 {x_3}^1 \vee {x_1}^1 {x_2}^1 {x_3}^0 \\ &= \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \end{aligned}$$

1.3.4 Kanonische konjunktive Normalform

Definition: Ein Boolescher Term des Typs

$$M_i = \overline{x_1}^{i_1} \vee \overline{x_2}^{i_2} \vee \ldots \vee \overline{x_n}^{i_n} \qquad \text{mit} \qquad \overline{x_\nu}^{i_\nu} = \begin{cases} x_\nu & \text{falls } i_\nu = 0 \\ \overline{x_\nu} & \text{falls } i_\nu = 1 \end{cases}$$

heißt *Maxterm* in n Variablen.

Eigenschaften

1. M_i enthält jede Variable genau einmal, negiert oder nicht negiert
2. Die Variablen sind disjunktiv verknüpft
3. M_i nimmt genau für eine Belegung der Variablen den Wert 0 an, sonst immer 1
4. Bedeutung des Index i von M_i: Die Binärdarstellung $\mathrm{Bin}\,(i)$ ergibt die Belegung der Variablen für die $M_i = 0$ ist

Beispiel: $n = 3, \quad M_5 = \overline{x_1}^1 \vee \overline{x_2}^0 \vee \overline{x_3}^1 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} = \begin{cases} 0 & x_1 = 1,\, x_2 = 0,\, x_3 = 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

Darstellungssatz II

$$\boxed{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge_{i \in \overline{I_f}} M_i}$$

mit $\overline{I_f} = I \setminus I_f$ heißt Darstellung von f in *kanonischer konjunktiver Normalform* (KKNF)

Beispiel: (zur Vereinfachung mit einer anderen Wertetabelle)

i	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

$\overline{I_f} = \{1, 5\}$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \bigwedge_{i \in \overline{I_f}} M_i = M_1 \wedge M_2 \\ &= (\overline{x_1}^0 \vee \overline{x_2}^0 \vee \overline{x_3}^1) \wedge (\overline{x_1}^1 \vee \overline{x_2}^0 \vee \overline{x_3}^1) \\ &= (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \end{aligned}$$

Bemerkungen

1. KDNF und KNNF sind eindeutig bis auf die Reihenfolge der Maxterme bzw. Minterme
2. Wann KDNF bzw. KKNF? Wertespalte enthält mehr 1 als 0 $\rightarrow$ KKNF, sonst KDNF.

1.3.5 Karnaugh–Tafel

Ziel: Gewinnen eines minimalen Booleschen Terms

Beispiel: $n = 4$

Wertetabelle:

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$	m_i
0	0	0	0	$f(0,0,0,0)$	m_0
0	0	0	1	$f(0,0,0,1)$	m_1
0	0	1	0	$f(0,0,1,0)$	m_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	1	1	$f(1,1,1,1)$	m_{15}

Karnaugh–Tafel für $n = 4$:

$x_{3,4}$ \ $x_{1,2}$	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

Eigenschaften:

1. Jedem Kästchen ist genau ein Minterm zugeordnet
2. Die Minterme in den benachbarten Kästchen unterscheiden sich in der Negation genau einer Variablen, z.B.

   $m_0 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \qquad m_1 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4$

   $m_4 = \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \qquad \cdots$

   (benachbart sind auch die Randkästchen)

3. Um Schaltfunktionen anzugeben werden die betreffenden Minterme durch 1 markiert
4. Vereinfachung der Schaltfunktionen geschieht durch Blockbildung benachbarter Minterme

Beispiele

1. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4 \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_3\,x_4 \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4 \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4} \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4$

$x_{1,2}$ \ $x_{3,4}$	00	01	11	10
00			1	
01			1	
11				
10	1	1	1	1

$= x_1\,\overline{x_2}$ unterer Viererblock
$\vee\, \overline{x_1}\,x_3\,x_4$ Zweierblock

Beim unteren Viererblock sind $x_3 \vee \overline{x_3}$ und $x_4 \vee \overline{x_4}$ immer wahr. Beim oberen Zweierblock ist $x_2 \vee \overline{x_2}$ immer wahr. Daher können diese Terme wegfallen.

$\Rightarrow \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\,\overline{x_2} \vee \overline{x_1}\,x_3\,x_4$

2. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4 \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_3\,x_4 \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4} \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4 \vee x_1\,x_2\,x_3\,\overline{x_4} \vee x_1\,x_2\,x_3\,x_4$

$x_{1,2}$ \ $x_{3,4}$	00	01	11	10
00			1	
01			1	
11			1	1
10			1	1

$= x_3\,x_4$ Viererspalte
$\vee\, x_1\,x_3$ Viererblock

In diesem Falle ist es einfacher mit zwei Viererblöcken als mit einem Vierer– und einem Zweierblock zu arbeiten. Vereinfacht ergibt sich für die Schaltfunktion:

$\Rightarrow \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3(x_4 \vee x_1)$

3. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\,x_2\,x_3\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_3\,x_4 \vee x_1\,\overline{x_2} \vee x_1\,x_2\,x_3\,x_4$

$x_{1,2}$ \ $x_{3,4}$	00	01	11	10
10	1	1	1	1
01			1	
11			1	1
10	1	1	1	1

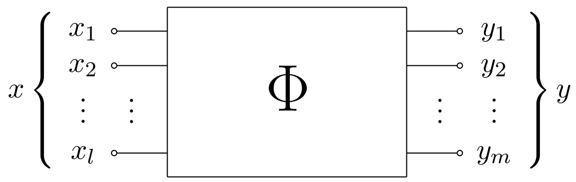
$= \overline{x_2}$ Achterblock
$\vee\, x_3\,x_4$ Viererspalte
$\vee\, x_1\,x_3$ Viererblock

$\Rightarrow \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_2} \vee x_3(x_1 \vee x_4)$

2 Statische digitale Systeme (kombinatorische Automaten)

2.1 Alphabetbildung

2.1.1 Alphabete



z.B. Gatterschaltung

Definitionen:

1. Die Menge $X = \{0,\, 1\}^l = \mathbb{B}^l$ heißt *Eingabealphabet* mit den Buchstaben

$$x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_l) \quad \text{oder} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_l \end{pmatrix}.$$

2. Die Menge $Y = \{0,\, 1\}^m = \mathbb{B}^m$ heißt *Ausgabealphabet* mit den Buchstaben

$$y = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m) \quad \text{oder} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

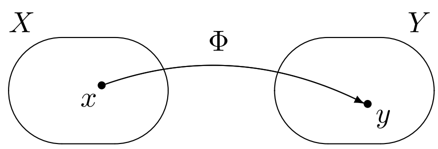
3. Jede Abbildung $\Phi : X \to Y$

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_l) = (y_1, y_2, \ldots y_m)$$

   kurz $\Phi(x) = y$ heißt *Alphabetabbildung.*

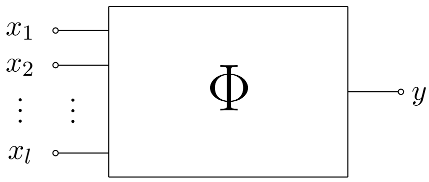
4. Das Eingabealphabet $X = \mathbb{B}^l$ und das Ausgabalphabet $Y = \mathbb{B}^m$ zusammen mit der Alphabetabbildung Φ bildet ein (abstraktes) *statisches digitales System* (oder einen *kombinatorischen Automaten*), in Zeichen: (X, Y, Φ)

   Beachte: (X, Y, Φ) stellt eine algebraische Struktur dar:



2.1.2 Systeme mit einem Ausgang

Sonderfall: $m = 1$, $X = \mathbb{B}^l$, $Y = \mathbb{B} = \{0, 1\}$

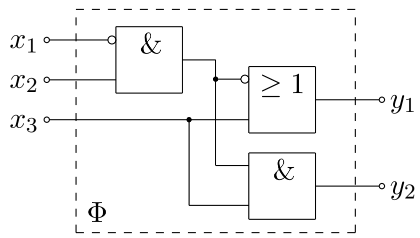


$y = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_l)$

Ergebnis: Die Alphabetabbildung stellt eine l–stellige Schaltfunktion dar.

2.1.3 Systeme mit mehreren Ausgängen

Beispiel: $l = 3$, $m = 2$

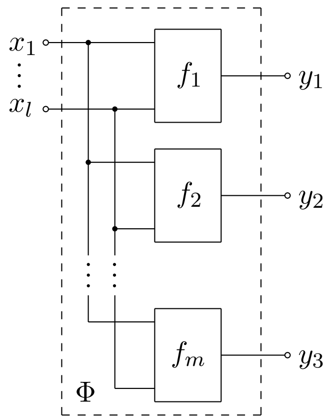


$y_1 = \overline{\overline{x_1}\, x_2} \vee x_3 = f_1(x_1, x_2, x_3)$
$y_2 = \overline{x_1}\, x_2\, x_3 = f(x_1, x_2, x_3)$

Verallgemeinerung: (l, m beliebig)

Die Alphabetabbildung Φ läßt sich durch m l–stellige Schaltfunktionen $f_i : \mathbb{B}^l \rightarrow \mathbb{B}$ ($i = 1, \ldots, n$) darstellen.

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_l) = y_1 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_l) = y_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_l) = y_m \end{array}\right\} \Phi : \mathbb{B}^l \rightarrow \mathbb{B}^m \qquad \Leftrightarrow$$



2.2 Wortabbildung

2.2.1 Buchstaben und Wörter

Definitionen:

1. Zeitskala $T = \{0,\, 1,\, \ldots,\, k,\, \ldots,\, N\}$, Taktzeitpunkte $k \in T$ (äquidistant).

   Die Zeit ist normiert (dimensionslos).

2. Die Abbildung $x : T \to X$ heißt *digitales Eingabesignal* oder *Eingabewort*

   Schreibweise: $x = (x(0), x(1), x(2), \ldots, x(k), \ldots, x(N))$

   $x(k) \in X$ ist *Eingabebuchstabe* im Taktzeitpunkt k

$$x = \left(\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_l(0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \\ \vdots \\ x_l(1) \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_1(N) \\ x_2(N) \\ \vdots \\ x_l(N) \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} (x_1(0), x_1(1), x_1(2), \ldots, x_1(N)) \\ (x_2(0), x_2(1), x_2(2), \ldots, x_2(N)) \\ \vdots \\ (x_l(0), x_l(1), x_l(2), \ldots, x_l(N)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_l \end{pmatrix}$$

3. Die Abbildung $y : T \to Y$ heißt *digitales Ausgabesignal* oder *Ausgabwert.*

   Schreibweise: $y = (y(0), y(1), y(2), \ldots, y(N))$

   Mit $y(k) = \begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_m(k) \end{pmatrix}$ analog zu 2.

4. Wortlänge $l(x) = |T| = N + 1$

5. Eingabewortraum: $X^T = X^*$ Menge aller Eingabewörter

   Ausgabewortraum: $Y^T = Y^*$ Menge aller Ausgabewörter

6. Die Abbildung $\Phi : X^* \to Y^*$, $\Phi(x) = y$ heißt *Wortabbildung*

2.2.2 Eigenschaften der Wortabbildung

Offensichtlich: Abbildung erfolgt Buchstabe für Buchstabe.

$$\begin{array}{lccccc} \text{Eingabewort:} \quad x: & x(0) & x(1) & x(2) & \cdots & x(N) \\ & \Phi\big\downarrow & \Phi\big\downarrow & \Phi\big\downarrow & \cdots & \Phi\big\downarrow \\ \text{Ausgabewort:} \quad y: & y(0) & y(1) & y(2) & \cdots & y(N) \end{array}$$

Grundgleichung des kombinatorischen Automaten: $\boxed{y(k) = \Phi(x(k))}$

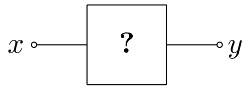
Diskussion:

1. $l(y) = l(y)$

2. Ausgabe $y(k)$ im Takt k hängt *nur* von Eingabe $x(k)$ im gleichen Takt k ab, nicht aber von $x(k-1),\ x(k-2),\ \ldots$

3. gleiche Eingangsbuchstaben haben gleiche Ausgangsbuchstaben zur Folge

Gegenbeispiel:



$$x = (1,1,0,1,0,0)$$
$$y = (0,1,0,0,0,1)$$

Diese Wortabbildung ist durch einen kombinatorische Automaten nicht realisierbar.

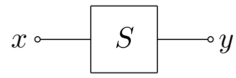
3 Dynamische digitale Systeme (sequentieller Automat)

3.1 Zustandsbeschreibung

3.1.1 Speicher

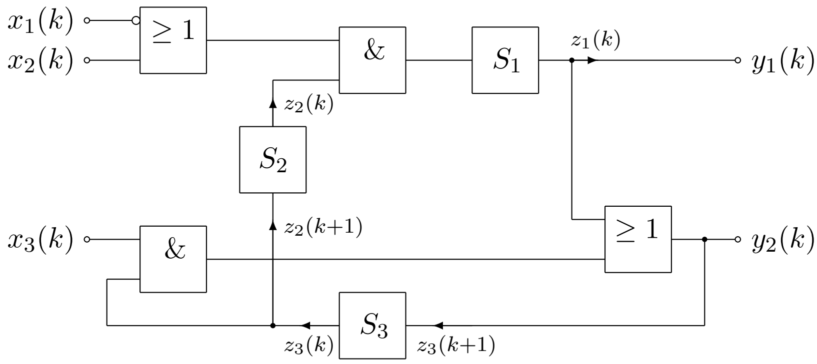
Zusätzlich zu den betrachteten BE (Gatter) wird eingeführt:

Speicher S $\qquad x(k) = y(k+1)$



Durch Hinzunahme von Speichern zu einem kombinatorischen Automaten entsteht ein sequentieller Automat.

Beispiel:



Regel: An den Ausgängen der Speicher werden „Hilfswörter" z_i erzeugt, da ein direkter Zusammenhang zwischen $y(k)$ und $x(k)$ nicht dargestellt werden kann.

Aus Schaltung ablesbar:

$$\begin{aligned}
z_1(k+1) &= z_2(k)(\overline{x_1(k)} \vee x_2(k)) \\
z_2(k+1) &= z_3(k) \\
z_3(k+1) &= z_1(k) \vee x_3(k)z_3(k) \\
y_1(k) &= z_1(k) \\
y_2(k) &= z_1(k) \vee x_3(k)z_3(k)
\end{aligned}$$

Eingangswert $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,0,0) \\ (1,0,1) \\ (0,1,1) \end{pmatrix}$, Anfangszustand $z(0) = \begin{pmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \\ z_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Gesucht: Ausgangswert $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = ?$

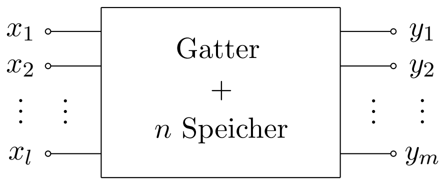
Lösung

k	0	1	2	3
$x_1(k)$	1	0	0	
$x_2(k)$	1	0	1	
$x_3(k)$	0	1	1	
$z_1(k)$	0	1	0	0
$z_2(k)$	1	0	0	1
$z_3(k)$	0	0	1	1
$y_1(k)$	0	1	1	
$y_2(k)$	0	0	1	

Ergebnis: $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,1,0) \\ (0,1,1) \end{pmatrix}$

3.1.2 Zustandsgleichungen

Verallgemeinerung:



$$z(k+1) \left\{ \begin{array}{rcl} z_1(k+1) & = & f_1[\overbrace{z_1(k), \ldots, z_m(k)}^{z(k)}, \overbrace{x_1(k), \ldots, x_l(k)}^{x(k)}] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_n(k+1) & = & f_n[z_1(k), \ldots, z_m(k), x_1(k), \ldots, x_l(k)] \end{array} \right.$$

$$y(k) \left\{ \begin{array}{rcl} y_1(k) & = & g_1[z_1(k), \ldots, z_m(k), x_1(k), \ldots, x_l(k)] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_n(k+1) & = & f_n[z_1(k), \ldots, z_m(k), x_1(k), \ldots, x_l(k)] \end{array} \right.$$

Zusammenfassung des sequentiellen Automaten:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} z(k+1) & = & f[z(k),\, x(k)] \\ y(k) & = & g[z(k),\, x(k)] \end{array}}$$

Definitionen:

1. Die Menge $Z = \mathbb{B}^n = \{0,\, 1\}^n$ heißt *Zustandsalphabet* (*Zustandsraum*).

2. Die Abbildung $z_T \to Z$ heißt *Zustandswort* (*Zustandstrajektorie*).

$$z = (z(0), z(1), \ldots, z(N)) \quad \text{mit} \quad z(k) = \begin{pmatrix} z_1(k) \\ \vdots \\ z_n(k) \end{pmatrix}$$

$z(k)$ heißt Zustand des Automaten im Takt k.

3. $z(0) = \begin{pmatrix} z_1(0) \\ \vdots \\ z_n(0) \end{pmatrix}$ heißt *Anfangszustand* des Automaten.

Diskussion der Zustandsgleichungen

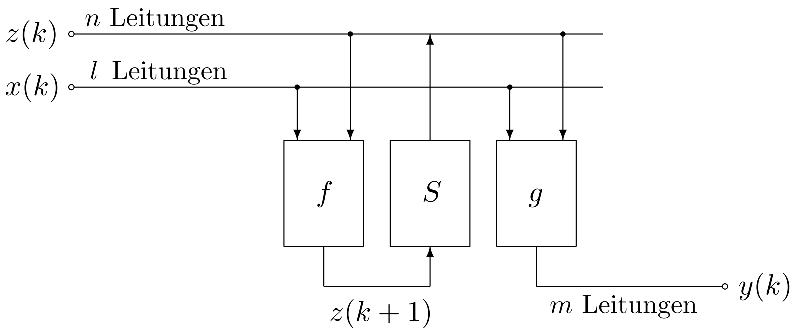
f**:** Überführungsfunktion

g**:** Ergebnisfunktion

Definition: Die Mengen $X = \mathbb{B}^l$ (Eingabealphabet), $Y = \mathbb{B}^m$ (Ausgabealphabet) und $Z = \mathbb{B}^n$ (Zustandsalphabet) zusammen mit den Abbildungen

$$\begin{aligned} f &: Z \times X \to Z \qquad & f[z(k), x(k)] &= z(k+1) \\ g &: Z \times X \to Y \qquad & g[z(k), x(k)] &= y(k) \end{aligned}$$

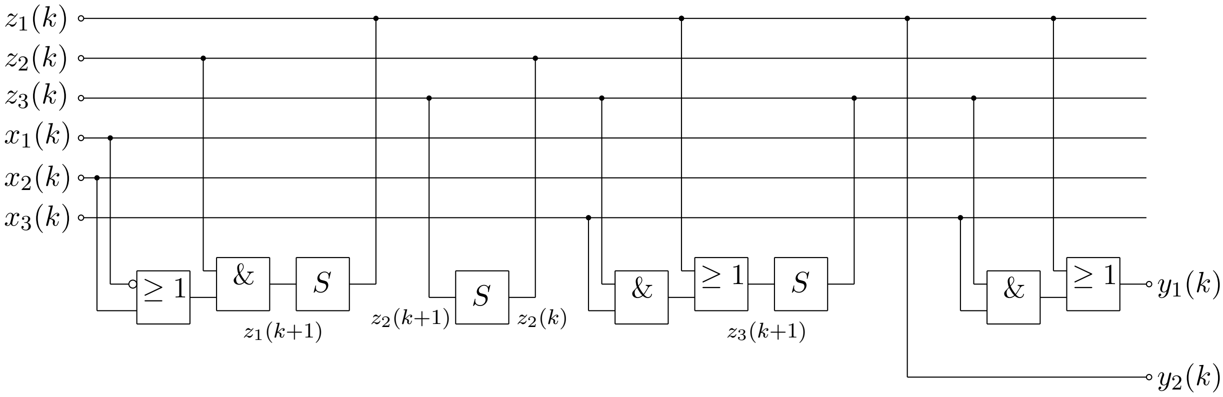
bilden ein (abstraktes) dynamisches digitales System (oder einen abstrakten sequentiellen Automaten oder Mealy–Automaten), in Zeichen (X, Y, Z, f, h).



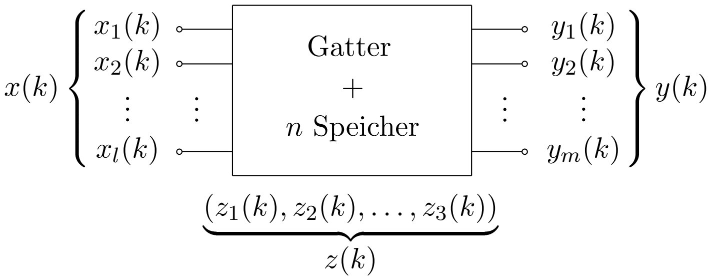
Der sequentielle Automat ist durch zwei herkömmliche Automaten (f und g) und n Speicher darstellbar.

Beispiel: (aus 3.1.1)

$$\begin{aligned} z_1(k+1) &= z_2(k)(\overline{x_1(k)} \vee x_2(k)) \qquad & y_1(k) &= z_1(k) \\ z_2(k+1) &= z_3(k) & y_2(k) &= z_1(k) \vee x_3(k)z_3(k) \\ z_3(k+1) &= z_1(k) \vee x_3(k)z_3(k) \end{aligned}$$



3.1.3 Automatendarstellung



$$\boxed{\begin{aligned} z(k+1) &= f[z(k), x(k)] \\ y(k) &= f[z(k), x(k)] \end{aligned}}$$

Der sequentielle Automat läßt sich wie folgt darstellen:

1. Automatentabelle:

Zustandsalphabet (Spalten), Eingabealphabet (Zeilen):

f	$\cdots$	$z(k)$	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	
$\vdots$		$\vdots$	
$x(k)$	$\cdots$	$z(k+1)$	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	
$\vdots$		$\vdots$	

Überführungstabelle

Zustandsalphabet (Spalten), Eingabealphabet (Zeilen):

g	$\cdots$	$z(k)$	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	
$\vdots$		$\vdots$	
$x(k)$	$\cdots$	$z(k+1)$	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	
$\vdots$		$\vdots$	

Ergebnistabelle

2. Automatengraph

Bezeichnung	Symbol	Bedeutung
Knoten	○	Zustand
Zweige (Kanten)	$\longrightarrow$	Zustandsübergänge

Zustandsgleichungen dargestellt durch:

$$\bigcirc\, z(k) \xrightarrow{x(k)|y(k)} \bigcirc\, z(k+1)$$

Beispiel 1:

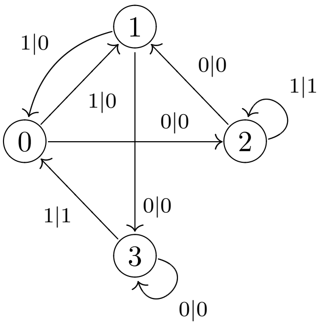
$X = \{0, 1\},\ Y = \{0, 1\},\ Z = \{\underbrace{(0,0)}_{0}, \underbrace{(0,1)}_{1}, \underbrace{(1,0)}_{2}, \underbrace{(1,1)}_{3}\}$

Automatentabelle (gegeben):

$$X\left\{\begin{array}{c|cccc} f & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right. \qquad X\left\{\begin{array}{c|cccc} g & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right.$$

(Spalten: Z)

Automatengraph:

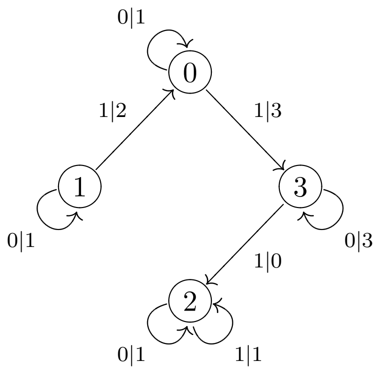


Es sei $x = (1, 0, 1, 0, 0)$ und $z(0) = 1$. Ablesen: $y = (0, 0, 1, 0, 0)$ und $z(5) = 3$.

Beispiel 2:

gegeben: Automatengraph

gesucht: Automatentabelle, Zustandsgleichungen, Schaltung



Automatentabelle:

		Z			
	f	0	1	2	3
X	0	0	1	2	3
	1	3	0	2	2

		Z			
	g	0	1	2	3
X	0	1	1	1	3
	1	3	2	1	0

Wertetabelle

$z(k)$	$x(k)$	$z(k+1)$	$y(k)$
0	0	0	1
0	1	3	3
1	0	1	1
1	1	0	2
2	0	2	1
2	1	2	1
3	0	3	1
3	1	2	0

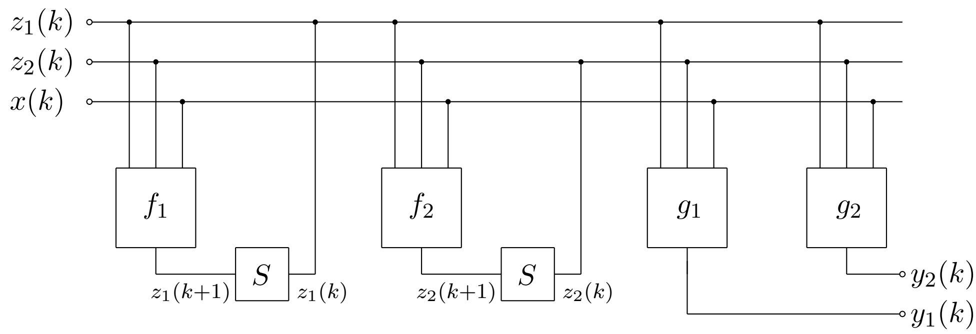
Dekodierte Wertetabelle

$z_1(k)$	$z_2(k)$	$x(k)$	$z_1(k+1)$	$z_2(k+1)$	$y_1(k)$	$y_2(k)$
0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0

Zustandsgleichungen (aus Karnaugh-Diagramm):

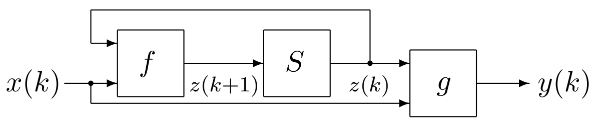
$$\begin{array}{lll}
f_1: & z_1(k+1) & = z_1(k) \vee \overline{z_2(k)}\, x(k) \\
f_2: & z_2(k+1) & = z_2(k)\, \overline{x(k)} \vee \overline{z_1(k)}\, \overline{z_2(k)}\, x(k) \\
g_1: & y_1(k) & = \overline{z_1(k)}\, x(k) \vee z_1(k)\, z_2(k)\, \overline{x(k)} \\
g_2: & y_2(k) & = \overline{z_2(k)} \vee \overline{x(k)}
\end{array}$$

Schaltung:



3.1.4 Spezielle Automaten

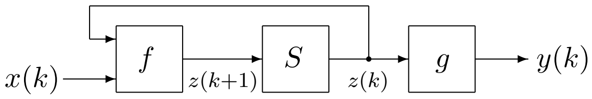
Allgemeiner Fall: Mealy-Automat



$$\begin{array}{lll}
z(k+1) & = & f[z(k), x(k)] \\
y(k) & = & g[z(k), x(k)]
\end{array}$$

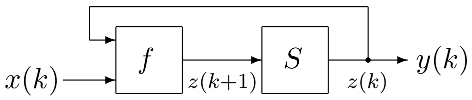
Sonderfälle:

(a) Moore-Automat



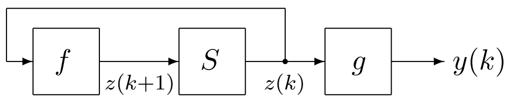
$$
\begin{aligned}
z(k+1) &= f[z(k), x(k)] \\
y(k) &= g[z(k)]
\end{aligned}
$$

(b) Medwedjew-Automat



$$
\begin{aligned}
z(k+1) &= f[z(k), x(k)] \\
y(k) &= z(k)
\end{aligned}
$$

(c) Autonomer Automat (Generator)



$$
\begin{aligned}
z(k+1) &= f[z(k)] \\
y(k) &= g[z(k)]
\end{aligned}
$$

NB: Bei allen Automaten muß der Zustand $z(0)$ bekannt sein.

3.2 Wortabbildungen

3.2.1 Abbildungsfamilie

Zustandsgleichungen → Schema der Wortabbildung:

Eingabewort x

$$
\begin{tikzcd}
 & x(0) \arrow[d] & & x(1) \arrow[d] & & & x(N) \arrow[d] & \\
z(0) \arrow[r] & f,g \arrow[r] \arrow[d] & z(1) \arrow[r] & f,g \arrow[r] \arrow[d] & z(2) \arrow[r, "\cdots"] & z(N) \arrow[r] & f,g \arrow[r] \arrow[d] & z(N+1) \\
 & y(0) & & y(1) & & & y(N) &
\end{tikzcd}
$$

Ausgabewort y

Diskussion:

1. Eingabewort und Ausgabewort haben die gleiche Länge, $L(x) = L(y)$
2. Der Ausgabebuchstabe $y(k)$ hängt von $x(k), x(k-1), \ldots, x(0)$ ab, nicht aber von $x(k+1)$, $x(k+2), \ldots$ (Kausalität).
3. Das Ausgabewort y hängt vom Anfangszustand $z(0)$ ab.

Definitionen:

1. Die Abbildung
$$\Phi_{z_0} : X^* \to Y^*, \qquad \Phi_{z_0}(x) = y$$
heißt vom Anfangszustand $z_0 = z(0) \in Z$ erzeugte *Wortabbildung.*

2. Jedem MEALY-Automaten ist eine *Abbildungsfamilie*
$$\underline{\Phi} = \{\Phi_{z_0} | z_0 \in Z\}$$
zugeordnet.

3.2.2 Eigenschaften der Wortabbildung

Definition: Sind $x' = (x'(0), x'(1), \ldots, x'(r))$ und $x'' = (x''(0), x''(1), \ldots, x''(s))$ zwei Wörter aus X^*, so heißt das Wort
$$x' \circ x'' = (x'(0), x'(1), \ldots, x'(r), x''(0), x''(1), \ldots, x''(s)) \in X^*$$
Verkettungsprodukt (*Konkatenationsprodukt*) von x' und x''.

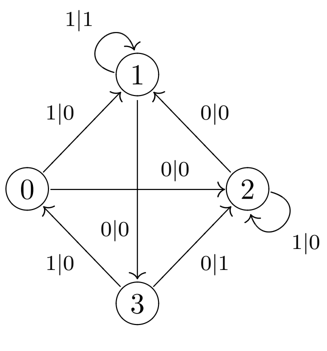
Beachte: Eine Wortabbildung $\Phi_{z_0} : X^* \to Y^*$ ist durch einen MEALY-Automaten realisierbar, falls gilt:

1. $L(x) = L(y)$
2. $\Phi_{z_0}(x' \circ x'') = \underbrace{\Phi_{z_0}(x')}_{y'} \circ \underbrace{\Phi_{z_0'}(x'')}_{y''}$ ($z_0{}'$: Zustand nach Eingabe von x')

3.2.3 Autonomer Automat

Wir betrachten MEALY-Automaten mit konstanter Eingabe.

Beispiel: Es sei $z(0) = 0$



Fall I: $x = (0, 0, 0, 0, \ldots)$
$z = (0, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, \ldots)$
$y = (-, 0, \underbrace{0, 1, 1,}_{\text{„Zyklus“}} 0, 1, 1, 0, \ldots)$ periodische Folge

Fall II: $x = (1, 1, 1, 1, \ldots)$
$z = (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$
$y = (-, 0, \underbrace{1, 1, 1, 1, 1}_{\text{„Fixpunkt“}}, \ldots)$ konstante Folge

Verhaltensformen des endlichen autonomen Automaten

I) Da bei $|Z| = 2^n$ nach spätestens $2^n - 1$ Takten alle Zustände ausgeschöpft sind, wird spätestens im Takt 2^n ein bereits durchlaufener Zustand erreicht.
$$z(k + s) = z(k), \qquad \text{für } 1 < s < z^n$$
s: Periodendauer

II) Nach r Takten wird ein konstanter Endzustand (Fixpunkt) erreicht:
$$z(k + 1) = z(k), \qquad \text{für } k > r$$
(An Schlingen im Graphen erkennbar.)

Teil 2: Zeitkontinuierliche Systeme

4 Zeitkontinuierliche Signale und Systeme

4.1 Signalbeschreibung im Zeitbereich

4.1.1 Zeitkontinuierliche Signale

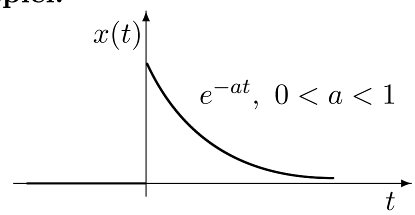
Festlegungen:

Zeitskala:	$\subseteq \mathbb{R}$
Sonderfälle:	$T = \mathbb{R}$
	$T = \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$
Alphabet:	$X = \mathbb{C}$
Sonderfall:	$X = \mathbb{R}$

Definition: Ein *zeitkontinuierliches Signal* ist eine Abbildung $x : T \to X$, durch die jedem Zeitpunkt $t \in T$ ein *Signalwert* $x(t) \in X$ zugeordnet ist.

Sonderfall: $x : T \to \mathbb{R}$ reelles zeitkontinuierliches Signal oder *analoges Signal.*

Beispiel:

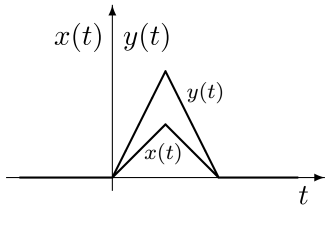


4.1.2 Signaloperationen

Einstellige Operationen

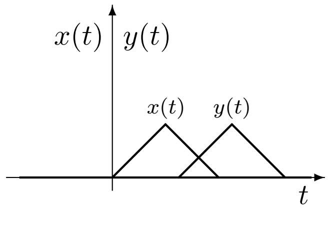
a) Skalarmultiplikation

$$y(t) = \alpha \cdot x(t)$$



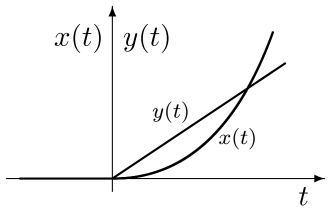
b) Translation

$$y = S^\tau(x)$$
$$y(t) = x(t - \tau)$$



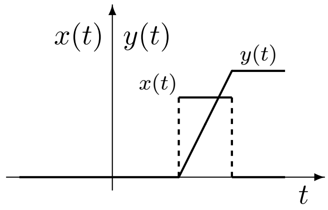
c) Differentiation

$$y = D(x)$$
$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$



d) Integration

$$y = D^{-1}(x)$$
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$



Zweistellige Operationen

a) Signaladdition: $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$

b) Signalmultiplikation: $y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$

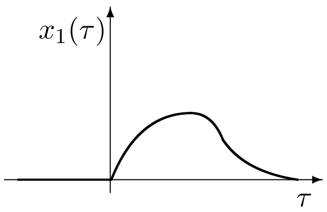
c) Faltung: $y = x_1 * x_2$

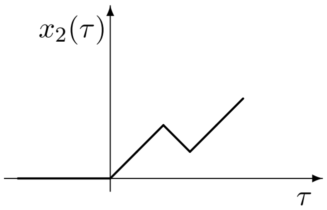
$$\begin{aligned} y(t) &= (x_1 * x_2)(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau) \cdot x_1(t-\tau)\, d\tau \\ &= (x_2 * x_1)(t) \qquad \Rightarrow \text{Faltung ist kommutativ!} \end{aligned}$$

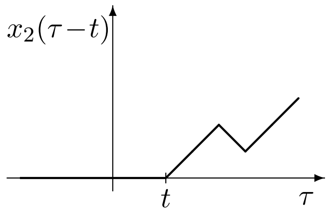
Sonderfall: $x_1(t) = 0$ für $t < 0$, $x_2(t) = 0$ für $t < 0$.

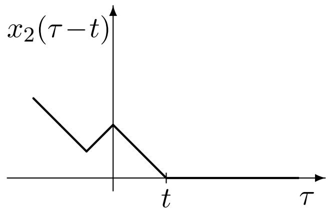
$$y(t) = (x_1 * x_2)(t) = \int_0^t \underbrace{x_1(\tau)}_{0 \text{ für } \tau<0} \cdot \underbrace{x_2(t-\tau)}_{0 \text{ für } \tau>t}\, d\tau$$

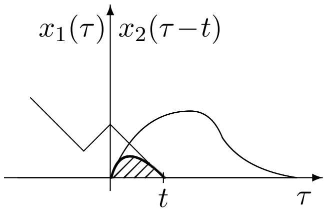
Veranschaulichung am Beispiel









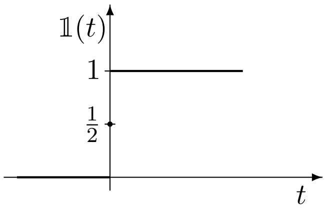


—— : $x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau)$

////// : $y(t) = \int_0^t x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau)\, d\tau$

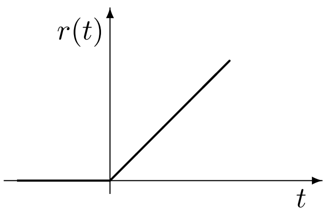
4.1.3 Spezielle Signale

(a) Sprungsignal



$$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad t > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für} \quad t = 0 \\ 0 & \text{für} \quad t < 0 \end{cases}$$

(b) Rampensignal



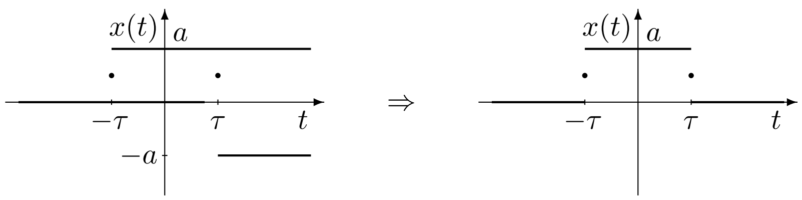
$$r = D^{-1}(\mathbb{1})$$

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbb{1}(\tau)\, d\tau = \begin{cases} t & \text{für} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad t < 0 \end{cases}$$

$$r(t) = t \cdot \mathbb{1}(t)$$

(c) Rechtecksignal

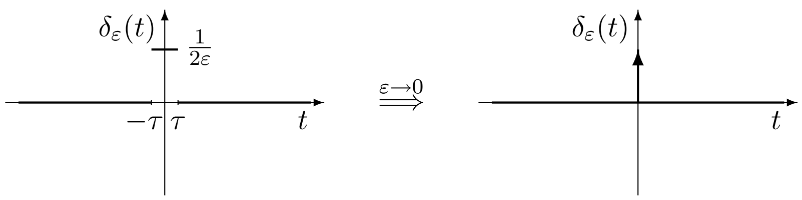
$$x(t) = a \cdot \mathbb{1}(t+\tau) - a \cdot \mathbb{1}(t-\tau)$$



$$x(t) = \begin{cases} a & \text{für} \quad -\tau < t < \tau \\ \frac{a}{2} & \text{für} \quad t = \pm\tau \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(d) Impulssignal, Dirac-Impuls

Aus (c) erhält man für $\tau = \varepsilon$ und $a = \frac{1}{2\varepsilon}$ das „schmale Rechtecksignal“ δ_ε



$$\boxed{\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t \neq 0 \\ \infty & \text{für} \quad t = 0 \end{cases} \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1}$$

Impulssignal, Dirac-Impuls, „Delta-Funktion“

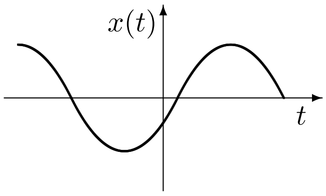
Diskussion:

- $\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon = \infty \;\Rightarrow$ existiert nicht

- $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t) \cdot f(t)\, dt = f(0)$ exisitiert

  kurz: $\boxed{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot f(t)\, dt = f(0)}$ Ausblendeeigenschft der DIRAC-Funktion

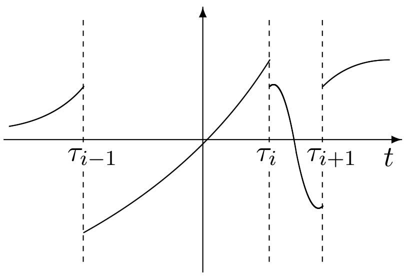
(e) Harmonisches Signal



$$x(t) = \hat{X} \cdot \cos(\omega t + \varphi_x)$$

4.1.4 Signale allgemeineren Typs

Definitionen:



1. Ein Signal heißt *stückweise stetig*, wenn in jedem endlichen Teilintervall gilt:

   (a) x ist stetig für alle $t \neq \tau_i$ $(i = 1, \ldots, n)$

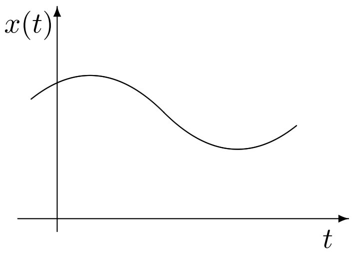
   (b) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} x(\tau_i \pm \varepsilon)$ existieren (kurz $x(\tau \pm 0)$)

2. Ein Signal heißt *stückweise glatt*, wenn (a) und (b) auch für $\dot{x}$ gelten.

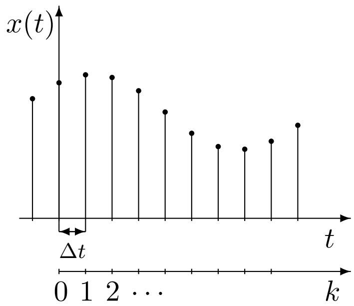
4.1.5 Interpolation abgetasteter Signale

a) Interpolationsproblem

Zeitkontinuierliches Signal



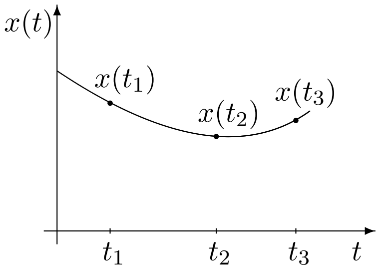
Äquidistante Abtastung



$$x(k) = x(t)\Big|_{t=k\cdot\Delta k}$$

Aufgabe: Zwischenwerte interpolieren, Abtastwerte unverändert lassen

b) Ansatz: Lagrangesche Interpolationsformel



$$
\begin{aligned}
x(t) = x(t_1) \cdot \frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} & \quad \text{bei } t_1 = 1,\ t_2 \text{ und } t_3 = 0 \\
+\ x(t_2) \cdot \frac{(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)} & \quad \text{bei } t_2 = 1,\ t_1 \text{ und } t_3 = 0 \\
+\ x(t_3) \cdot \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)} & \quad \text{bei } t_3 = 1,\ t_1 \text{ und } t_2 = 0
\end{aligned}
$$

Verallgemeinerung auf K Messwerte:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{K} x(t_k) \cdot \frac{(t-t_1)\cdots(t-t_{k-1})(t-t_{k+1})\cdots(t-t_K)}{(t_k+t_1)\cdots(t_K-t_{k-1})(t_k-t_{k+1})\cdots(t_k-t_K)}$$

mit $P_K(t) = (t-t_1)(t-t_2)\cdots(t-t_K)$:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=1}^{K} x(t_k) \cdot \frac{P_K(t)}{(t-t_k)\cdot {P_K}'(t_k)}}$$

$$P_K(t) = t_1 \cdot t_2 \cdot \cdots \cdot t_K \cdot \underbrace{\left(\tfrac{t}{t_1}-1\right)\left(\tfrac{t}{t_2}-1\right)\cdots\left(\tfrac{t}{t_K}-1\right)}_{Q_K(t)}$$

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=1}^{K} x(t_k) \cdot \frac{Q_K(t)}{(t-t_k)\cdot {Q_K}'(t_k)}}$$

c) Lagrange-Interpolation für äquidistante Abtastwerte

$t_k = k \cdot \Delta t, \quad (k \text{ ganz}), \quad K \to \infty$

$$
\begin{aligned}
Q_\infty(t) &= \cdots \left(\frac{t}{-k\cdot\Delta t} - 1\right)\cdots\left(\frac{t}{-\Delta t}-1\right)\cdot t \cdot \left(\frac{t}{\Delta t}-1\right)\cdots\left(\frac{t}{k\cdot\Delta t}-1\right)\cdots \\
&= t \cdot \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{t^2}{k^2\cdot\Delta t^2}\right) = \sin\frac{\pi}{\Delta t}\cdot t
\end{aligned}
$$

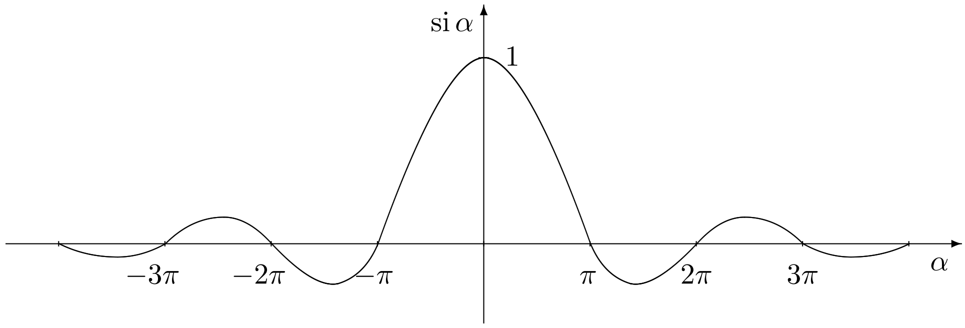
Einsetzen in das Ergebnis von b):

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\cdot\Delta t)\frac{\sin\frac{\pi}{\Delta t}\cdot t}{(t-k\cdot\Delta t)\cdot\frac{\pi}{\Delta t}\cdot\underbrace{\cos\frac{\pi}{\Delta t}\cdot k\cdot\Delta t}_{-1^k}} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\cdot\Delta t)\frac{-1^k\cdot\sin\frac{\pi}{\Delta t}\cdot t}{(t-k\cdot\Delta t)\cdot\frac{\pi}{\Delta t}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\cdot\Delta t)\frac{\sin(\frac{\pi}{\Delta t}\cdot t - k\cdot\pi)}{(t-k\cdot\Delta t)\cdot\frac{\pi}{\Delta t}} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\cdot\Delta t)\frac{\sin(\frac{\pi}{\Delta t}\cdot(t-k\cdot\Delta t))}{\frac{\pi}{\Delta t}\cdot(t-k\cdot\Delta t}
\end{aligned}
$$

(Abtastreihe, Samplingreihe)

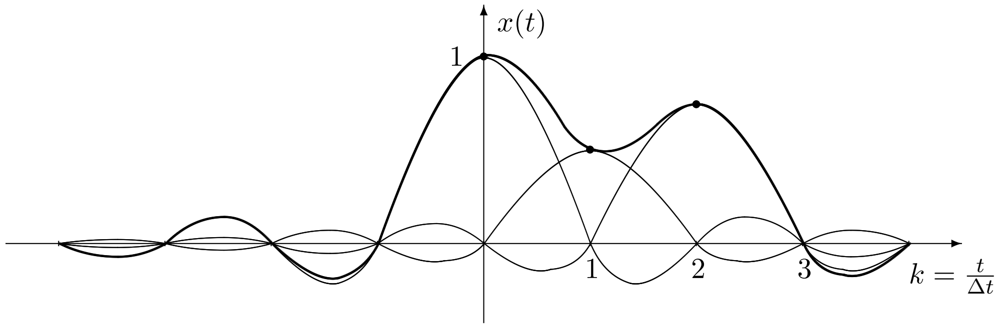
d) Interpretation der Samplingreihe

Aufbaufunktion vom Typ $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = \operatorname{si}\alpha$



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\cdot\Delta t)\cdot \operatorname{si}\left(\frac{\pi}{\Delta t}\cdot(t-k\cdot\Delta t)\right)$$

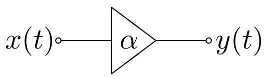
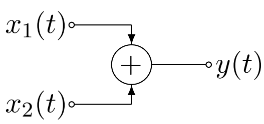
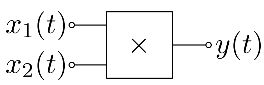
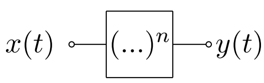
Beispiel für $k=3$, $x(0)=1$, $x(1)=0{,}5$, $x(2)=0{,}75$:



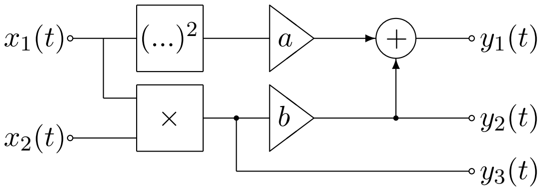
4.2 Statische Systeme mit kontinuierlicher Zeit

4.2.1 Elementarsysteme

Grundbausteine

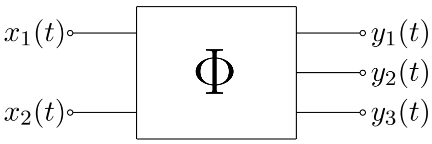
Signalabbildung	Gleichung	Schaltsymbol	Bezeichnung
Skalarmultiplikation	$y(t) = \alpha\cdot x(t),\ \alpha\in\mathbb{R}$		Verstärker
Signaladdition	$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$		Verstärker
Signalmultiplikation	$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$		Multiplizierglied
Sonderfall	$y(t) = [x(t)]^n$		Potenzierglied

Beispiel für Zusammenschaltung



$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= f_1(x_1(t),\, x_2(t)) = a \cdot (x_1(t))^2 + b \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) \\
y_2(t) &= f_2(x_1(t),\, x_2(t)) = b \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) \\
y_3(t) &= f_3(x_1(t),\, x_2(t)) = x_1(t) \cdot x_2(t)
\end{aligned}
$$

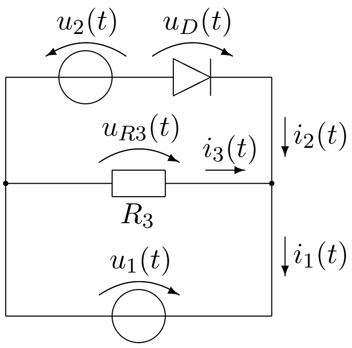
Schema



$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$\Phi(\underbrace{x_1(t),\, x_2(t)}_{\in \mathbb{R}^2}) = (\underbrace{y_1(t),\, y_2(t),\, y(3)}_{\in \mathbb{R}^3})$$

Wichtiger Sonderfall: Resistives elektrisches Netzwerk (keine Energiespeicher)



Eingänge:

$u_1(t) \leftrightarrow x_1(t)$
$u_2(t) \leftrightarrow x_2(t)$

Ausgang:

$i_1(t) \leftrightarrow y_1(t)$
$i_2(t) \leftrightarrow y_2(t)$
$i_3(t) \leftrightarrow y_3(t)$

Widerstand: $i_3(t) = \dfrac{u_{R3}(t)}{R_3} = \dfrac{u_1(t)}{R_3}$

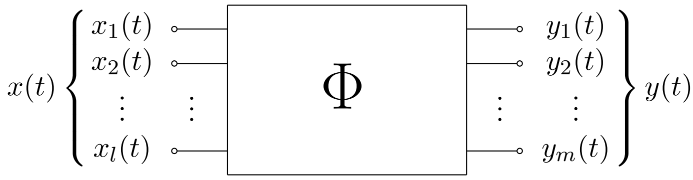
Diode: $i_2(t) = a \cdot \left(e^{b \cdot u_D(t)} - 1\right)$

Knotengleichung: $i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)$

Maschengleichung: $u_D(t) = u_1(t) + u_2(t)$

$$
\begin{aligned}
i_1(t) &= f_1(u_1(t),\, u_2(t)) = \frac{u_1(t)}{R_3} + a \cdot \left(e^{b(u_1(t)+u_2(t))} - 1\right) \\
i_2(t) &= f_2(u_1(t),\, u_2(t)) = a \cdot \left(e^{b(u_1(t)+u_2(t))} - 1\right) \\
i_3(t) &= f_3(u_1(t),\, u_2(t)) = \frac{u_1(t)}{R_3}
\end{aligned}
$$

4.2.2 Verallgemeinerung der Beispiele



$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= f_1(x_1(t),\, \ldots,\, x_l(t)) \\
\vdots \quad & \qquad\qquad \vdots \\
y_m(t) &= f_m(x_1(t),\, \ldots,\, x_l(t))
\end{aligned}
$$

Definitionen:

a) Die Menge $X \in \mathbb{R}^l$ heißt *Eingabealphabet* mit den Buchstaben (Signalwerten)

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_l(t) \end{pmatrix} \in X.$$

b) Die Menge $Y \in \mathbb{R}^m$ heißt *Ausgabealphabet* mit den Buchstaben (Signalwerten)

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix} \in Y.$$

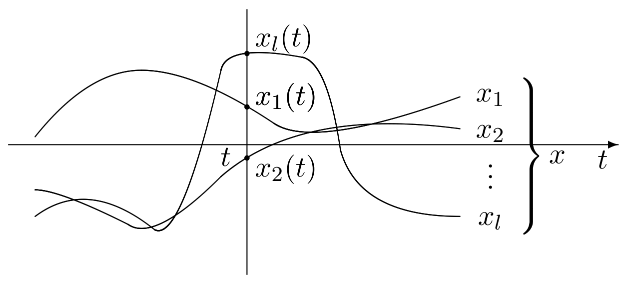
c) Die Abbildung $\Phi : X \to Y$

$$\Phi(x_1(t),\, \ldots\, x_l(t)) = (y_1(t),\, \ldots,\, y_m(t)),$$

kurz $\Phi(x(t)) \to y(t)$ heißt *Alphabetabbildung.*

d) Das Eingabealphabet X, das Ausgabealphabet Y und die Alphabetabbildung Φ bilden ein (abstraktes) *statisches System*, in Zeichen: $(X,\, Y,\, \Phi)$.

e) Die Abbildung $x : T \to X,\ (X = \mathbb{R}^l)$ heißt l*–dimensionales Eingabesignal*:

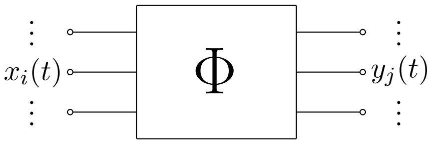


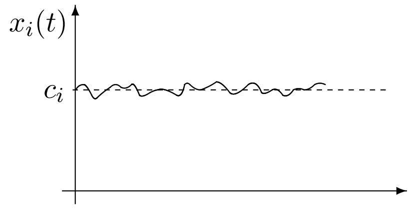
f) Die Abbildung $y : T \to Y,\ (Y = \mathbb{R}^m)$ heißt n*–dimensionales Ausgabesignal.*

g) Die Menge aller Eingangssignale $X^T = X^*$ heißt *Eigangssignalraum*, die Menge aller Ausgabesignale $Y^T = Y^*$ heißt *Ausgabesignalraum.*

h) Die Abbildung $\Phi : X^* \to Y^*,\ \Phi(x) = y$ heißt *Signalabbildung.*

4.2.3 Kleinsignalverhalten





Für alle Eingänge soll gelten:

$$x_i(t) = c_i + \Delta x_i(t), \quad i = 1, \ldots, l, \quad |\Delta x_i(t)|_{max} \ll |c_i|$$

Für die Ausgänge gilt dann:

$$y_j(t) = f_j(x_1(t), \ldots, x_l(t))$$

Taylorreihe:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{1!} f'(x) \cdot h + \frac{1}{2!} f''(x) \cdot h^2 + \cdots$$

für $h \ll x$ betrachten wir als gute Näherung nur das erste Glied der Taylorreihe:

$$\begin{aligned} y_j(t) &= f_j(x_1(t), \ldots, x_l(t)) \\ &\approx f_j(c_1, \ldots, c_l) + \Delta y_j(t), \qquad\qquad\qquad j = 1, \ldots, m \\ &\approx f_j(c_1, \ldots, c_l) + \underbrace{\sum_{i=1}^{l} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(c_1, \ldots, c_l) \cdot \Delta x_i}_{\Delta y_j(t)} \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \Delta y_1(t) \\ \vdots \\ \Delta y_m(t) \end{pmatrix}}_{\Delta y(t)} = \underbrace{\left. \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_l} \end{pmatrix} \right|_{x_i = c_i}}_{\text{Jacobi-Matrix } J(x)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta x_1(t) \\ \vdots \\ \Delta x_l(t) \end{pmatrix}}_{\Delta x(t)}$$

mit $c_i = c \rightarrow$ konstante Matrix, Kurzform:

$$\boxed{\Delta y(t) = J(c) \cdot \Delta x(t)} \qquad \rightarrow \text{Linearisierung bei Kleinsignalbetrieb!}$$

Beispiel: System aus Abschnitt 4.2.1

$$\begin{aligned} y_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t)) = a \cdot (x_1(t))^2 + b \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) \\ y_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t)) = b \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) \\ y_3(t) &= f_3(x_1(t), x_2(t)) = x_1(t) \cdot x_2(t) \end{aligned}$$

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ax_1 + bx_2 & bx_1 \\ bx_2 & bx_1 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

Es seien:

$$x_1(t) = c_1 + \underbrace{\widehat{x}_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1)}_{\Delta x_1} \qquad \text{und} \qquad x_2(t) = c_2 + \underbrace{\widehat{x}_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2)}_{\Delta x_2}$$

mit $|\widehat{x}_1| \ll c_1,\ |\widehat{x}_2| \ll c_2$

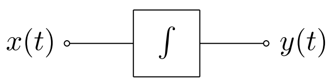
$$\begin{pmatrix} \Delta y_1(t) \\ \Delta y_2(t) \\ \Delta y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ax_1 + bx_2 & bx_1 \\ bx_2 & bx_1 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \widehat{x}_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \widehat{x}_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &\approx a{c_1}^2 + bc_1c_2 + (2ac_1 + bc_2) \cdot \widehat{x}_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + bc_1 \cdot \widehat{x}_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ y_2(t) &\approx bc_1c_2 + bc_2 \cdot \widehat{x}_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + bc_1 \cdot \widehat{x}_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ y_3(t) &\approx c_1c_2 + c_2 \cdot \widehat{x}_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + c_1 \cdot \widehat{x}_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}$$

4.3 Dynamische zeitkontinuierliche Systeme

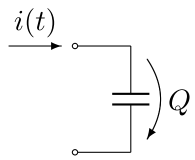
4.3.1 Zustandsbeschreibung

Hinzunahme eines weiteren Elements: *Integrierglied.*



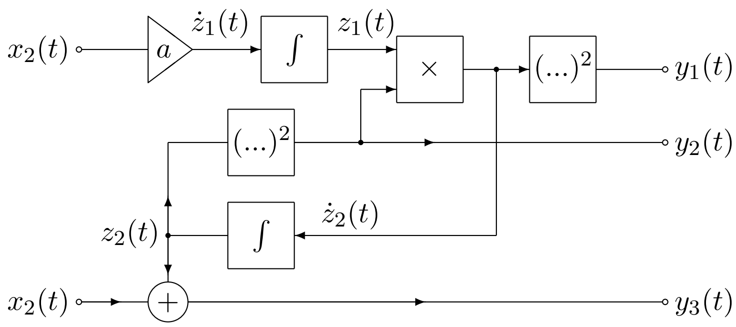
$$y(t) = y_0 + \int_0^t x(\tau)\, d\tau, \qquad \dot{y}(t) = x(t)$$

Beispiel aus der Elektrotechnik: Kondensator



$$Q(t) = Q(0) + \int_0^t i(\tau)\, d\tau, \qquad \dot{Q}(t) = i(t)$$

Zusammenschaltung mit Elementarsystem (4.2.1):



$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= a \cdot x_1(t) & \qquad y_1(t) &= (z_1(t) \cdot {z_2}^2(t))^2 = {z_1}^2(t) \cdot {z_2}^4(t) \\ \dot{z}_2(t) &= z_1(t) \cdot {z_2}^2(t) & y_2(t) &= {z_2}^2(t) \\ & & y_3(t) &= z_2(t) + x_2(t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ nichtlineares gekoppeltes DGL-System 1. Ordnung.
Es sei:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= t & \text{für } t \geq 0 \qquad & z_1(0) = 0 \\ x_2(t) &= \sin \omega t & \text{für } t \geq 0 \qquad & z_2(0) = -1 \end{aligned}$$

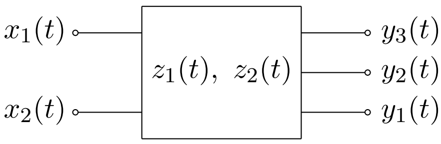
Lösung:

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1(t) &= a x_1(t) = a \cdot t \\
z_1(t) &= a\frac{t^2}{2} + c_1 && \text{mit } z_1(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\
z_1(t) &= a\frac{t^2}{2}
\end{aligned}
$$

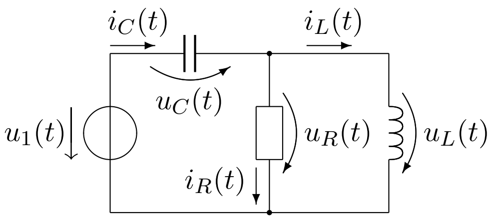
$$
\begin{aligned}
\dot{z}_2(t) &= z_1(t) \cdot {z_2}^2(t) = \frac{at^2}{2} \cdot {z_2}^2(t) \\
\frac{dz_2}{{z_2}^2} &= \frac{at^2}{2}\,dt \\
-\frac{1}{z_2} &= \frac{at^3}{6} + c_2 && \text{mit } z_2(0) = -1 \Rightarrow c_2 = 1 \\
z_2(t) &= \frac{-1}{\frac{at^3}{6}} = \frac{-6}{at^3 + 6}
\end{aligned}
$$

Einsetzen in Ergebnisfunktionen $y_1(t),\ y_2(t),\ y_3(t)$. Ggf. numerische Lösungsverfahren für komplizierte DGL-Systeme anwenden.

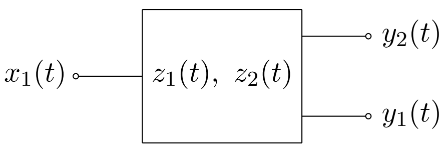
Schema für Beispiel



Wichtigster Sonderfall: Nichtlineares RLC-Netzwerk



Schema:



Eingabe:

$u_1(t) \Leftrightarrow x(t)$

Ausgabe:

$u_L(t) \Leftrightarrow y_1(t)$

$u_C(t) \Leftrightarrow y_2(t)$

Zustände:

$\Phi(t) \Leftrightarrow z_1(t)$ (Magnetfluß)

$Q(t) \Leftrightarrow z_2(t)$ (Ladung)

Schaltelemente:

$$
\begin{aligned}
i_R(t) &= \varphi_R(u_R(t)) = \tfrac{u(t)}{R} \\
u_C(t) &= \varphi_C(Q(t)) = \tfrac{Q(t)}{C} \\
i_L(t) &= \varphi_L(\Phi(t)) = \tfrac{\Phi(t)}{L} \\
u_L(t) &= \dot{\Phi}(t) \\
i_C(t) &= \dot{Q}(t)
\end{aligned}
$$

Maschengleichung:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= u_C(t) + u_L(t) \\ &= \varphi_C(Q(t)) + \dot{\Phi}(t) \end{aligned}$$

Knotengleichung:

$$\begin{aligned} i_C(t) &= i_R(t) + i_L(t) \\ &= \varphi_R(u_R(t)) + \varphi_2(\Phi(t)) = \dot{Q}(t) \end{aligned}$$

Zustandsgleichungen:

$$\dot{\Phi}(t) = u_1(t) - \varphi_C(Q(t))$$

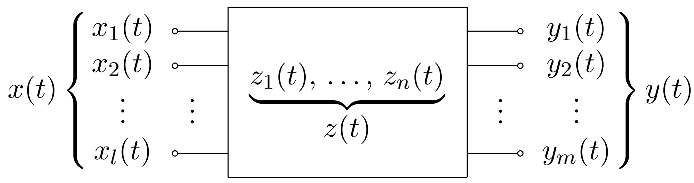
$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) &= \varphi_L(\Phi(t)) + \varphi_R(u_R(t)) \\ &= \varphi_L(\Phi(t)) + \varphi_R(u_1(t) - \varphi_C(Q(t))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_L(t) &= u_1(t) - \varphi_C(Q(t)) \\ u_C(t) &= \varphi_C(Q(t)) \end{aligned}$$

allgemein:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= f_1(z_1(t),\, z_2(t),\, x(t)) \\ \dot{z}_2(t) &= f_2(z_1(t),\, z_2(t),\, x(t)) \\ y_1(t) &= g_1(z_1(t),\, z_2(t),\, x(t)) \\ y_1 2t) &= g_2(z_1(t),\, z_2(t),\, x(t)) \end{aligned}$$

Verallgemeinerung



$$\dot{z}(t) = \begin{cases} \dot{z}_1(t) = f_1(z_1(t),\, \dots,\, z_n(t),\, x_1(t),\, \dots,\, x_l(t)) \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \dot{z}_n(t) = f_n(z_1(t),\, \dots,\, z_n(t),\, x_1(t),\, \dots,\, x_l(t)) \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t) = g_1(z_1(t),\, \dots,\, z_n(t),\, x_1(t),\, \dots,\, x_l(t)) \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ y_m(t) = g_m(z_1(t),\, \dots,\, z_n(t),\, x_1(t),\, \dots,\, x_l(t)) \end{cases}$$

Kurzform:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{z}(t) &= f(z(t),\, x(t)) \\ y(t) &= g(z(t),\, x(t)) \end{aligned}}$$

Grundgleichung des zeitkontinuierlichen dyn. Systems

f: Übertragungsfunktion $\qquad g$: Ergebnisfunktion

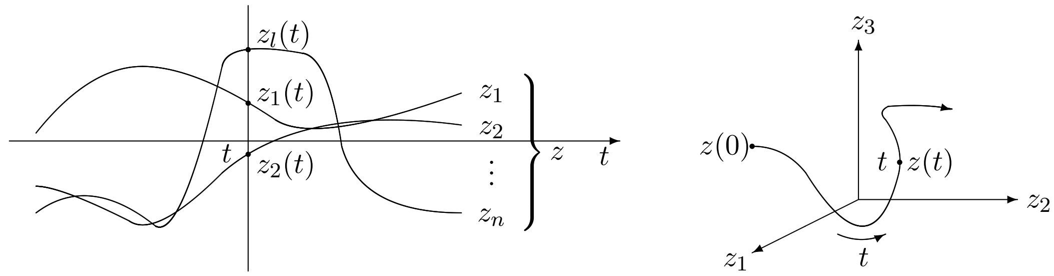
Definitionen:

1. Die Menge $Z = \mathbb{R}^n$ heißt *Zustandsalphabet* (auch *Zustandsraum*).

$$z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} \in Z, \qquad (z_i(t) \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n)$$

2. $z(t)$ heißt *Zustand* des Systems zum Zeitpunkt t. $z(0)$ heißt *Anfangszustand* des Systems.

3. Die Abbildung $z : T \to Z$ ($Z = \mathbb{R}^n$) heißt n-dimensionales *Zustandssignal* (oder *Zustandstrajektorie*).



4. Die Mengen $X = \mathbb{R}^l$ (Eingabealphabet), $Y = \mathbb{R}^m$ (Ausgabealphabet) und $Z = \mathbb{R}^n$ (Zustandsalphabet) sowie die Überführungsfunktion

$$f : Z \times X \to Z,\ f(z(t), x(t)) = \dot{z}(t)$$

und die Ergebnisfunktion

$$g : Z \times X \to Y,\ g(z(t), x(t)) = y(t)$$

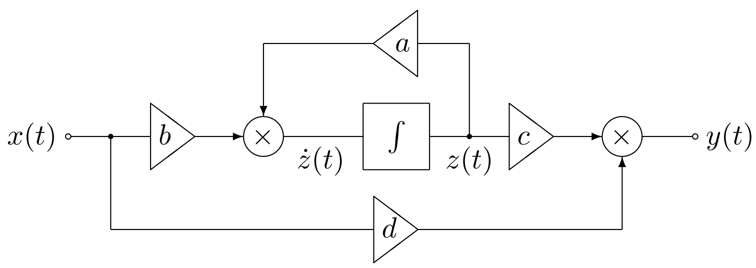
bilden ein abstraktes zeitkontinuierliches dynamisches System, in Zeichen (X, Y, Z, f, g).

4.3.2 Lineares zeitkontinuierliches System 1. Ordnung

$$\left.\begin{array}{ll} \dot{z}(t) = a \cdot z(t) + b \cdot x(t) & \text{Überführungsfunktion} \\ y(t) = c \cdot z(t) + d \cdot x(t) & \text{Ergebnisfunktion} \end{array}\right\} \text{Zustandsgleichungen}$$

(f und g sind jetzt lineare Funktionen)

Schaltung



gegeben: $x(t)$ für $t \geq 0$, $z(0)$

gesucht: $y(t)$ für $t \geq 0$

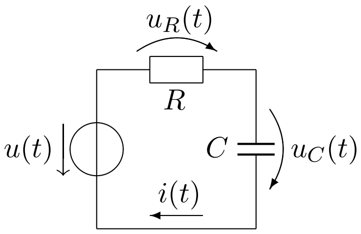
Lösung: $\dot{z}(t) - a \cdot z(t) = b \cdot x(t)$ lineare DGL (inhomogen) 1. Ordnung

$$z(t) = z(0) \cdot e^{a \cdot t} + \int_0^t b \cdot e^{a(t-\tau)} x(\tau)\, d\tau$$

$$y(t) = \underbrace{c \cdot z(0) \cdot e^{a \cdot t}}_{\text{freie Ausgabe}} + \underbrace{\int_0^t b \cdot c \cdot e^{a \cdot (t-\tau)} \cdot x(\tau)\, d\tau + d \cdot x(t)}_{\text{erzwungene Ausgabe}}$$

4.3.3 Nichtlineares zeitkontinuierliches System 1. Ordnung

Beispiel:



Zuordnungen:

$$\begin{aligned} u(t) &\Leftrightarrow x(t) \\ i(t) &\Leftrightarrow y(t) \\ u_C(t) &\Leftrightarrow z(t) \end{aligned}$$

nichtlinearer Widerstand: $i_R(t) = \alpha \cdot {u_R}^3(t)$ (Varistor-Typ)

linearer Kapazivität: $u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot Q(t)$, $\dot{u}_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \dot{Q}(t) = \frac{1}{C} \cdot i(t)$

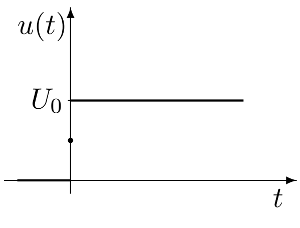
Maschengleichung: $u(t) = u_R(t) + u_C(t)$

Knotengleichung: $i(t) = i_R(t) = i_R(t)$

Zustandsgleichungen: $\dot{u}_C(t) = \frac{1}{C} \cdot i_R(t) = \frac{1}{C} \cdot \alpha \cdot {u_R}^3(t)$

$$\dot{u}_C(t) = \frac{\alpha}{C} \cdot [u(t) - u_C(t)]^3 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{z}(t) = f[z(t),\, x(t)]$$

$$i(t) = \alpha \cdot [u(t) - u_C(t)]^3 \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = g[z(t),\, x(t)]$$

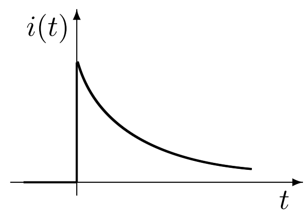


$$u(t) = U_0 \cdot \mathbb{1}(t)$$

Lösung für $t \geq 0$: $\dfrac{du_C(t)}{dt} = \dfrac{\alpha}{C}\, [U_0 - u_C(t)]^3$ Lösung durch Trennung der Veränderlichen

$$u_C(t) = U_0 \left(1 - \sqrt{\frac{C}{2\alpha \cdot {U_0}^2 \cdot t + C}} \right)$$

$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} = i(t) = \alpha \cdot \left(\frac{C \cdot {U_0}^2}{2\alpha \cdot {U_0}^2 \cdot t + C} \right)^{\frac{3}{2}}$$

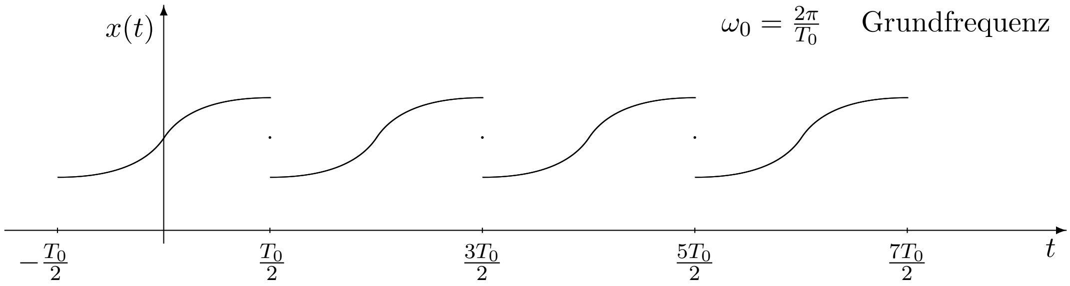


5 Lineare Systeme

5.1 Signalbeschreibung im Bildbereich (Fourier-Transformation)

5.1.1 Die komplexe Fourier-Reihe

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ Grundfrequenz



Satz: Für jedes mit T_0 periodische stückweise glatte Signal x gilt:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(\omega_k) \cdot e^{j\omega_k t}} \qquad (\omega_k = k \cdot \omega_0)$$

wobei

$$\boxed{c(\omega_k) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cdot e^{-j\omega_k t}\, dt} \qquad \text{komplexer Fourier-Koeffizient}$$

Beweisskizze:

$$\begin{aligned}
c(\omega_n) &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cdot e^{-j\omega_n t}\, dt && \text{Einsetzen von } x(t) \\
&= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(\omega_k) \cdot e^{j\omega_k t} \cdot e^{-j\omega_n t}\, dt && \omega_k = k \cdot \omega_0,\ \omega_n = n \cdot \omega_0 \\
&= \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(\omega_k) \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j(k-n)\omega_0 t}\, dt && \text{Integral verschwindet, außer für } k = n \\
&= \frac{1}{T_0} \cdot c(\omega_0) \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} 1\, dt
\end{aligned}$$

Komplexe Fourier-Koeffizienten: $c(\omega_k) = c_k$

Die Folge $c = (\ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots)$ heißt *komplexes diskretes Fourier-Spektrum* des periodischen Signals.

Eigenschaften der Koeffizienten c_k:

1. $c_{-k} = \overline{c_k} = {c_k}^*$

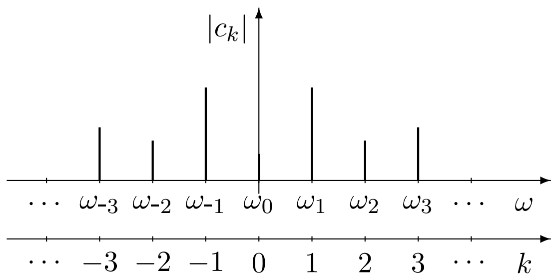
   $z + z^* = 2 \cdot \mathrm{Re}\,(z),\ \ c_k = |c_k| \cdot e^{j \arg c_k}$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j\omega_k t} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\,(c_k \cdot e^{j\omega_k t})$$

$$\boxed{x(t) = c_0 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cdot \cos(\omega_k \cdot t + \arg c_k)} \qquad \text{reelle Fourierreihe}$$

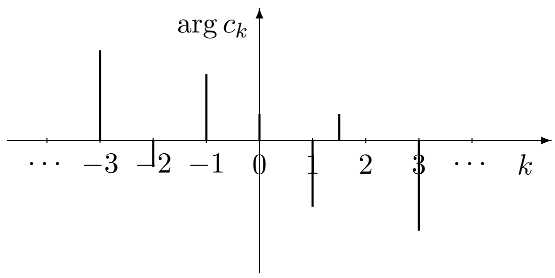
Graphische Darstellung

Amplitudenspektrum



gerade Funktion, da
$|c_k| = |c_{-k}| = |{c_k}^*|$

Phasenspektrum



ungerade Funktion, da
$\arg c_k = -\arg c_{-k} = -\arg {c_k}^*$

2. $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x^2(t)\,dt$ $\qquad$ PARSEVALsche Formel (Leistungsbilanz)

3. $|c_k| \to 0 \quad$ für $\quad k \to \infty$

5.1.2 Fourier-Integral

Aperiodische Signale $\to$ Ansatz: Fourier-Reihe mit $T_0 \to \infty$

Definition: Signalraum ${X_0}^*$: Es gilt $x \in {X_0}^*$, falls

(a) x ist stückweise glatt

(b) x ist absolut integrierbar, d.h. $\int_0^\infty |x(t)|\,dt < \infty$

Satz: Für jedes Element $x \in {X_0}^*$ gilt die Darstellung

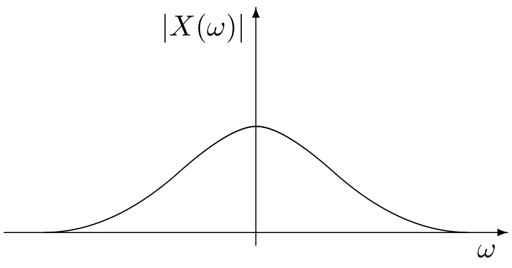
$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t}\,d\omega}\ , \quad \text{wobei} \quad \boxed{X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t}\,dt}$$

X heißt kompexes (kontinuierliches) Fourier-Spektrum des Signals x.

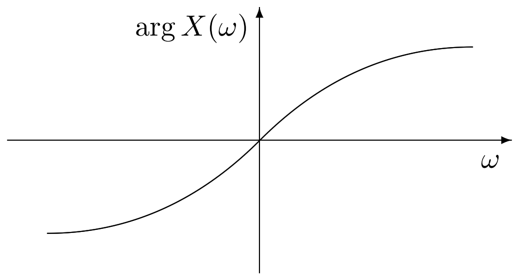
Eigenschaften

1. $X(-\omega) = X^*(\omega)$

Amplitudendichtespektrum



Phasenspektrum



2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (X(\omega))^2\, d\omega$ Parsevalsche Formel (Leistungsbilanz)

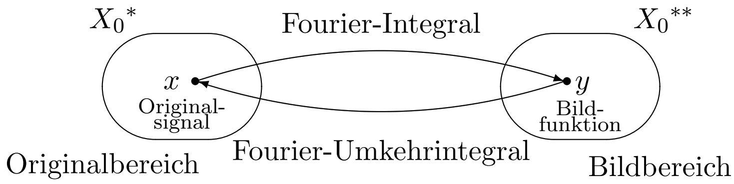
3. $|X(\omega)| \to 0 \quad$ für $\quad \omega \to \infty$

Beispiele: Korrespondenztabelle S. 55

Erster Eintrag: Dirac-Impuls

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt = 1$$

5.1.3 Fourier-Transformation



Zusammenfassung: Zu jedem $x \in X_0{}^*$ existiert eine bijektive Abbildung mit den Zuordnungen

$$x \longmapsto X \qquad X \longmapsto x$$

Diese Abbildung heißt Fouriertransformation bzw. Fourierrücktransformation.

Schreibweise: $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega), \quad \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = x(t)$

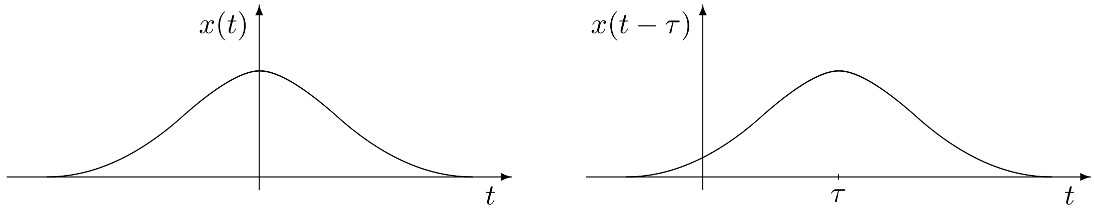
$$\boxed{\begin{array}{rl} X(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt & = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}\,dt \\ x(t) = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\cdot e^{j\omega t}\,d\omega & = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi f t}\,df \end{array}}$$

5.1.4 Rechenregeln der Fourier-Transformation

→ Heft S. 54

1. $\mathcal{F}\{\alpha \cdot x_1(t) + \beta \cdot x_2(t)\} = \alpha \cdot \mathcal{F}\{x_1(t)\} + \beta \cdot \mathcal{F}\{x_2(t)\} = \alpha \cdot X_1(\omega) + \beta \cdot X_2(\omega)$ (Linearkombination)

2. Verschiebungssatz



$\mathcal{F}\{x(t)\}$ bekannt, $\mathcal{F}\{x(t-\tau)\}$ gesucht

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{x(t-\tau)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\underbrace{t-\tau}_{t'}) \cdot \underbrace{e^{-j\omega t}}_{e^{-j\omega(t'+\tau)}} \underbrace{dt}_{dt'} \qquad && t-\tau = t',\ t = t'+\tau \\
&= e^{-j\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \cdot e^{-j\omega t'}\, dt' \\
&= e^{-j\omega\tau} \cdot \mathcal{F}\{x(t)\} && e^{-j\omega\tau} : \text{Verschiebungsfaktor}
\end{aligned}$$

5. Differentiationsregel: $\mathcal{F}\{\dot{x}(t)\} = j\omega\mathcal{F}\{x(t)\} = j\omega X(\omega)$

7. Faltungssatz: $\mathcal{F}\{(x_1 * x2)(t)\} = \mathcal{F}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)\, d\tau\right\} = X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$

5.2 Signalbeschreibung im Bildbereich (Laplace-Transformation)

5.2.1 Laplace-Integral

Nachteil der Fourier-Transformation: konvergiert für wichtige Signale nicht, z.B.

- Sprungfunktion ($\mathbb{1}(t)$)
- periodische Funktionen

Ansatz: ($\sigma > 0,\ s = \sigma + j\omega$: komplexe Frequenz)

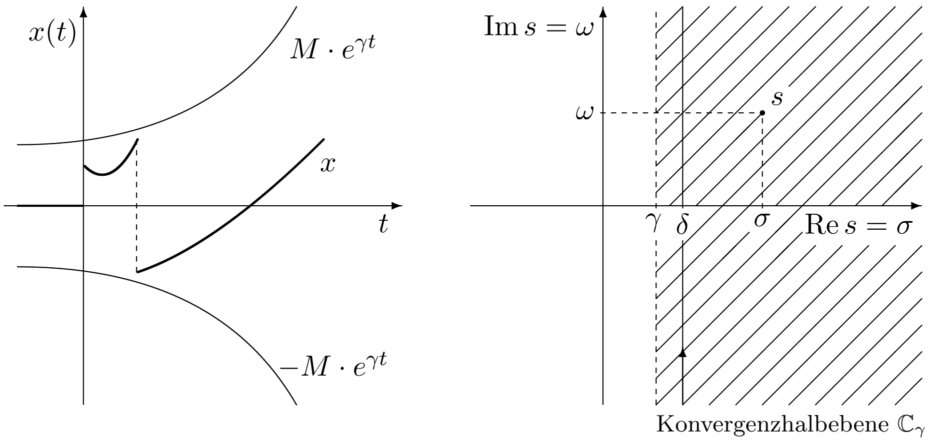
$$\mathcal{F}\{\underbrace{x(t) \cdot e^{-\sigma t} \cdot \mathbb{1}(t)}_{\in X_0{}^*}\} = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-(\sigma+j\omega)t} = X(\underbrace{\sigma + j\omega}_{s})$$

Definition: Signalraum $X_\gamma{}^*$

Es gilt: $x \in X_\gamma{}^*$, falls

(a) x ist stückweise glatt
(b) für $t < 0$ ist $x(t) = 0$ („kausale Signale")
(c) für $t \geq 0$ gilt $|x(t)| < M \cdot e^{\gamma t}$ $(0 < M < \infty,\ \gamma < \infty)$

Veranschaulichung:



$$\boxed{X(s) = \int_0^\infty x(t) \cdot e^{-st}\, dt} \qquad \text{Laplace-Integral}$$

Satz: Für jedes Integral $x \in X_\gamma^*$ gilt die Darstellung

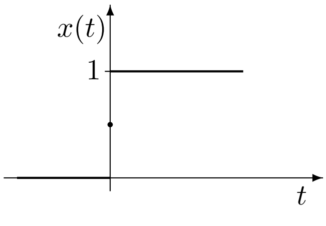
$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta - j\infty}^{\delta + j\infty} X(s) \cdot e^{st}\, ds} \qquad \text{Laplace-Umkehrintegral}$$

Bemerkungen:

1. Das Laplace-Integral konvergiert für alle $s = \sigma + j\omega$, für die $\operatorname{Re}(s) = \sigma > \gamma$ gilt.
2. $X(s)$ stellt im Inneren von $\mathbb{C}_\gamma$ (Konvergenzhalbebene) eine reguläre (analytische, holomorphe) Funktion der komplexen Variablen s dar.
3. Für das Umkehrintegral gilt: $\delta > \gamma$.

Beispiele

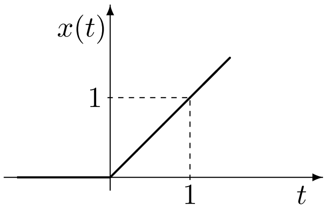
1. $x(t) = \mathbb{1}(t)$



$$X(s) = \int_0^\infty \underbrace{\mathbb{1}(t)}_{1} \cdot e^{-st}\, dt = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^\infty$$

$$= 0 - \frac{e^0}{-s} = \frac{1}{s} \qquad \text{für } \operatorname{Re}(s) = \sigma > 0$$

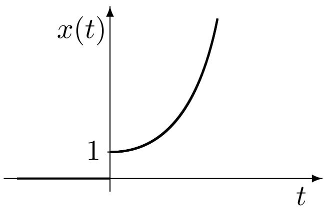
2. $x(t) = t \cdot \mathbb{1}(t)$



$$X(s) = \int_0^\infty t \cdot \underbrace{\mathbb{1}(t)}_{1} \cdot e^{-st}\, dt = \int_0^\infty t \cdot e^{-st}\, dt = [\ldots]$$

$$= \frac{1}{s^2} \qquad \text{für } \operatorname{Re}(s) = \sigma > 0$$

3. $x(t) = e^{at} \cdot \mathbb{1}(t) \quad (a \in \mathbb{R})$

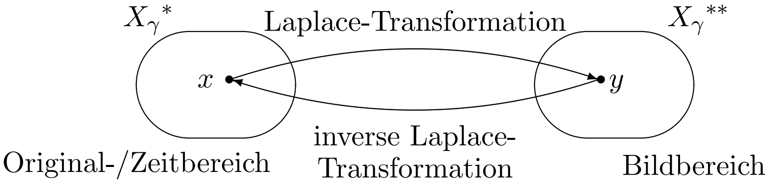


$$X(s) = \int\limits_0^\infty e^{at} \cdot e^{-st}\, dt = \int\limits_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt = \left. \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right|_0^\infty$$
$$= \frac{1}{s-a}$$

Bedingung: $\mathrm{Re}\,(s-a) > 0,\ \mathrm{Re}\,(s) = \sigma > a$

Korrespondenzen: Doetsch, Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplacetransformation, siehe auch Tabelle im Heft.

5.2.2 Laplace-Transformation



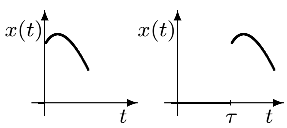
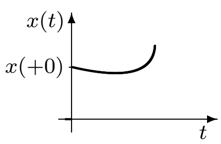
Für alle Signale $x \in X_\gamma{}^*$ existiert eine bijektive Abbildung mit den Zuordnungen

$$x \longmapsto X \qquad X \longmapsto x.$$

Diese Abbildung heißt Laplace-Transformation bzw. inverse Laplace-Transformation.

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}(x(t)) = X(s) &= \int\limits_0^\infty x(t) \cdot e^{-st}\, dt \\ \mathcal{L}^{-1}(X(s)) = x(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\delta - j\infty}^{\delta + j\infty} X(s) \cdot e^{-st}\, ds \end{aligned}}$$

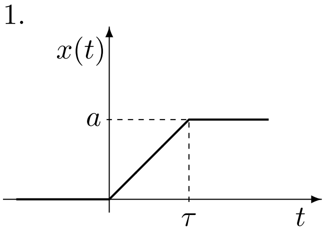
5.2.3 Rechenregeln

Nr.	$x(t)$	$X(s)$	Bemerkung
1.	$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$	$\alpha X_1(s) + \beta X_2(s)$	Linearität
2.	$x(t-\tau),\ (\tau > 0)$ 	$e^{-s\tau} \cdot X(s)$	Verschiebungssatz
3.	$x(a \cdot t),\ (a > 0)$ $a > 1$: Stauchung $a < 1$: Streckung	$\frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$	Ähnlichkeitssatz
4.	$\dot{x}(t)$ 	$s \cdot X(s) - x(+0)$	Differentiationsregel

5.	$\int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau$	$X(s)\frac{1}{s}$	Integrationsregel
6.	$x(t)\cdot e^{-at}$	$X(s+a)$	Dämpfungssatz
7.	$\int\limits_0^t x_1(\tau)x_2(t-\tau)\,d\tau = (x_1 * x_2)(t)$	$X_1(s)\cdot X_2(s)$	Faltungssatz

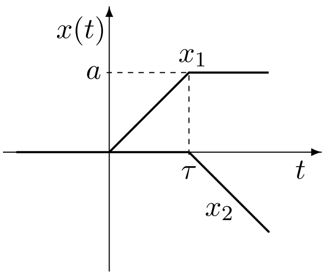
Anwendungsbeispiele

1.



$$\mathcal{L}(x(t)) = \int\limits_0^\infty x(t)\cdot e^{-st}\,dt = \int\limits_0^\tau \frac{a}{\tau}\cdot t\cdot e^{-st}\,dt + \int\limits_\tau^\infty a\cdot e^{-st}\,dt$$
$$= \dots$$

$\Downarrow$ Zerlegung $\Downarrow$ $\qquad\qquad$ $\Downarrow$ Vereinfachung $\Downarrow$



$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ x_1(t) &= \frac{a}{\tau}\cdot t\cdot \mathbb{1}(t) \\ x_2(t) &= -\frac{a}{\tau}(t-\tau)\cdot\mathbb{1}(t-\tau) \end{aligned}$$

$$X(s) = \underbrace{X_1(s) + X_2(s)}_{\text{Regel 1}} = \frac{a}{\tau}\frac{1}{s^2} - \underbrace{\frac{a}{\tau}\frac{1}{s^2}\cdot e^{-s\tau}}_{\text{Regel 2}} = \frac{a}{\tau s^2}\left(1 - e^{-s\tau}\right)$$

2. gegeben: $X(s) = \underbrace{\frac{1}{s(s+3)}}_{X_1(s)}\cdot e^{-s\tau}$, gesucht: $x(t) = \,?$

Zunächst: $\mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)\}$, danach Zeitverschiebung um τ.

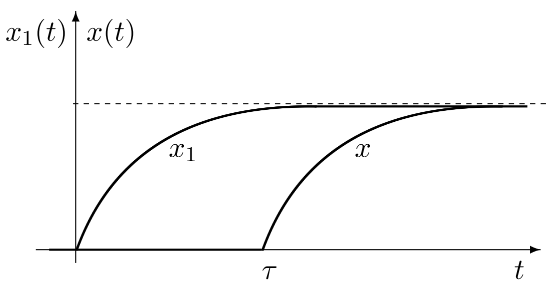
$$X_1(s) = \frac{1}{s(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3},\ \text{durch Partialbruchzerlegung: } A = \frac{1}{3},\ B = -\frac{1}{3}$$

Aus der Korrespondenztabelle:

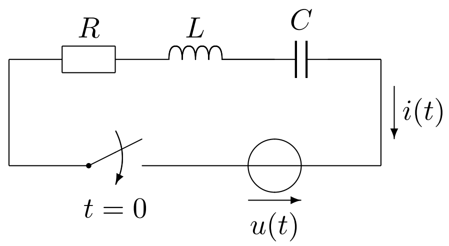
$$x_1(t) = \frac{1}{3}\cdot\mathbb{1}(t) - \frac{1}{3}\cdot e^{-3t}\cdot\mathbb{1}(t) = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3t}\right)\cdot\mathbb{1}(t)$$

Zeitverschiebung um τ ($e^{-s\tau}$):

$$x(t) = x_1(t-\tau) = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3(t-\tau)}\right)\cdot\mathbb{1}(t-\tau)$$



3. gegeben ($Q_C(0) = 0$):



gesucht: $i(t)$ für $t > 0$

$$R \cdot i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int\limits_0^t i(\tau)\,d\tau = u(t)$$

$\Rightarrow$ Differentialgleichung

$\mathcal{L}$-Transformation:

$$R \cdot I(s) + \underbrace{L(s \cdot I(s)}_{\text{Regel 4}} - \underbrace{i(+0)}_{0}) + \frac{1}{C} \cdot \underbrace{\frac{1}{s} \cdot I(s)}_{\text{Regel 5}} = U(s)$$

$$\left(R + s \cdot L + \frac{1}{s \cdot C}\right) \cdot I(s) = U(s)$$

Beachte:

1. Einfacher Zusammenhang im Bildbereich
2. Gleichung kann mit Regeln der E-Technik sofort aus Schaltung abgelesen werden

$\Rightarrow$ *verallgemeinerte symbolische Methode*

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{U(s)}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{U(s) \cdot sC}{s^2LC + sRC + 1} = \frac{U(s)}{L}\frac{s}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} \\ &= \frac{U(s)}{L}\frac{s}{(s - s_1)(s - s_2)} \end{aligned}$$

$$s_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}, \qquad \text{sei } \left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC} \quad \Rightarrow \quad s_1,\, s_2 \in \mathbb{R}$$

$$I(s) = \underbrace{\frac{U(s)}{L}}_{X_2(s)} \cdot \underbrace{\left[\frac{A}{s - s_1} + \frac{B}{s - s_2}\right]}_{X_1(s)}, \qquad A = \frac{s_1}{s_1 - s_2},\ B = \frac{s_2}{s_2 - s_1}$$

Faltungssatz (Regel 7):

$$\begin{aligned} i(t) &= \int\limits_0^t x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau)\,d\tau \qquad \text{mit } x_1(t) = A \cdot e^{s_1 t} + B \cdot e^{s_2 t} \\ &= \int\limits_0^t \left[\frac{s_1}{s_1 - s_2} \cdot e^{s_1\tau} + \frac{s_2}{s_2 - s_1} \cdot e^{s_2\tau}\right] \cdot \frac{1}{L} \cdot u(t - \tau)\,d\tau \end{aligned}$$

5.2.4 Grenzwertsätze

Es sei $x,\ \dot{x} \in X_\gamma{}^*$. Dann gilt:

1. Falls $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = A$, dann gilt auch $\lim\limits_{s\to 0} s \cdot X(s) = A$
2. Falls $\lim\limits_{t\to +0} x(t) = B$, dann gilt auch $\lim\limits_{s\to\infty} s \cdot X(s) = B$

Beispiel (aus 5.2.3)

$$x(t) = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3t}\right) \cdot \mathbb{1}(t), \qquad X(s) = \frac{1}{s(s+3)}$$

1. $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \frac{1}{3}$

   $\lim\limits_{s\to 0} s \cdot X(s) = \lim\limits_{s\to 0} \frac{1}{s+3} = \frac{1}{3}$ ✓
2. $\lim\limits_{t\to +0} x(t) = 0$

   $\lim\limits_{s\to\infty} s \cdot X(s) = \lim\limits_{s\to\infty} \frac{1}{s+3} = 0$ ✓

5.2.5 Die inverse Laplace-Transformation

Es gilt (s. 5.2.2) für $X \in X_\gamma{}^{**}$:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\delta - j\infty}^{\delta + j\infty} X(s) \cdot e^{st}\, ds \tag{1}$$

Probleme

1. Wann gilt $X \in X_\gamma{}^{**}$?

   Teilantwort: Es gilt $X \in X_\gamma{}^{**}$, falls

   (a) $X(s)$ ist rational in s, d.h.

   $$X(s) = \frac{\sum\limits_{\nu}^{Z} a_\nu \cdot s^\nu}{\sum\limits_{\nu}^{N} b_\nu \cdot s^\nu}$$

   Z: Grad des Zählerpolynoms
   N: Grad des Nennerpolynoms

   (b) für $s \to \infty$ gilt $X(s) \to 0$, d.h. $Z < N$
2. Wie kann das Umkehrintegral (1) auf einfache Weise berechnet werden?

   Teilantwort: Ist $X(s)$ rational in s und gilt $Z < N$, so gilt die Residuenformel

   $$\boxed{x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \sum_{s=s_i} \operatorname{Res}\left[X(s) \cdot e^{st}\right]} \qquad (t > 0)$$

   s_i: Singuläre Stellen von $X(s)$.

Berechnung der Residuen

s_i sei Pol 1. Ordnung:

$$\operatorname*{Res}_{s=s_i}\left[X(s)\cdot e^{st}\right] = \lim_{s=s_i}\left[X(s)\cdot e^{st}\cdot(s-s_i)\right]$$

s_i sei Pol m-ter Ordnung:

$$\operatorname*{Res}_{s=s_i}\left[X(s)\cdot e^{st}\right] = \frac{1}{(m-1)!}\cdot\lim_{s=s_i}\frac{d^{(m-1)}}{ds^{(m-1)}}\left[X(s)\cdot e^{st}\cdot(s-s_i)^m\right]$$

1. Beispiel: $X(s) = \dfrac{3s^2+16s+6}{s^3+4s^2-3s-18} = \dfrac{3s^2+16s+6}{(s-2)(s+3)^2}$

$s_1 = 2$: einfacher Pol, $(m_1 = 1)$
$s_2 = -3$: doppelter Pol, $(m_2 = 2)$

$$\operatorname*{Res}_{s=2}\left[X(s)\cdot e^{st}\right] = \lim_{s\to 2}\left[\frac{3s^2+16s+6}{(s-2)(s+3)^2}\cdot e^{st}\cdot(s-2)\right] = 2\cdot e^{2t}$$

$$\operatorname*{Res}_{s=2}\left[X(s)\cdot e^{st}\right] = \frac{1}{(2-1)!}\cdot\lim_{s\to 3}\frac{d}{ds}\left[\frac{3s^2+16s+6}{(s-2)(s+3)^2}\cdot e^{st}\cdot(s+3)^2\right] \overset{[\dots]}{=} (3t+1)\cdot e^{-3t}$$

Ergebnis:

$$x(t) = 2\cdot e^{2t} + (3t+1)\cdot e^{-3t} \qquad (t>0)$$

2. Beispiel: $X(s) = \frac{2s}{s+3}$ hier $Z = N$!

Wir bilden:

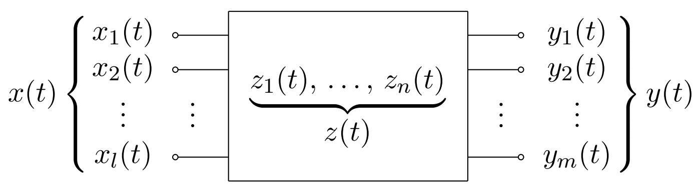
$$X(s) = \frac{2s}{s+3} - X(\infty) + X(\infty) = \frac{2s}{s+3} - 2 + 2 = \frac{-6}{s+3} + 2$$

Rücktransformation mit Tabelle:

$$x(t) = -6e^{-3t}\cdot\mathbb{1}(t) + 2\delta(t)$$

5.3 Systembeschreibung im Zeitbereich

5.3.1 Zustandsgleichungen



Allgemein:

$$\left.\begin{aligned}\dot z_1(t) &= f_1[z_1(t),\,\dots,\,z_n(t),\,x_1(t),\,\dots,\,x_l(t)]\\ &\vdots\\ \dot z_n(t) &= f_n[z_1(t),\,\dots,\,z_n(t),\,x_1(t),\,\dots,\,x_l(t)]\end{aligned}\right\}\text{Überführungsgleichungen}$$

$$\left.\begin{aligned}y_1(t) &= g_1[z_1(t),\,\dots,\,z_n(t),\,x_1(t),\,\dots,\,x_l(t)]\\ &\vdots\\ y_m(t) &= g_m[z_1(t),\,\dots,\,z_n(t),\,x_1(t),\,\dots,\,x_l(t)]\end{aligned}\right\}\text{Ergebnisgleichungen}$$

Für lineare Systeme gilt:

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
\dot z_1(t) &=& a_{11}\cdot z_1(t) &+& \cdots &+& a_{1n}\cdot z_n(t) &+& b_{11}\cdot x_1(t) &+& \cdots &+& b_{1l}\cdot x_l(t)\\
&\vdots&&&&&&&&&&&\\
\dot z_n(t) &=& a_{n1}\cdot z_1(t) &+& \cdots &+& a_{nn}\cdot z_n(t) &+& b_{n1}\cdot x_1(t) &+& \cdots &+& b_{nl}\cdot x_l(t)\\
y_1(t) &=& c_{11}\cdot z_1(t) &+& \cdots &+& c_{1n}\cdot z_n(t) &+& d_{11}\cdot x_1(t) &+& \cdots &+& d_{1l}\cdot x_l(t)\\
&\vdots&&&&&&&&&&&\\
y_m(t) &=& c_{m1}\cdot z_1(t) &+& \cdots &+& c_{mn}\cdot z_m(t) &+& d_{m1}\cdot x_1(t) &+& \cdots &+& d_{ml}\cdot x_l(t)
\end{array}$$

In Matrizen-Form:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\dot z_1(t)\\ \vdots\\ \dot z_n(t)\end{pmatrix}}_{\dot z(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}z_1(t)\\ \vdots\\ z_n(t)\end{pmatrix}}_{z(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1l}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{n1} & \cdots & b_{nl}\end{pmatrix}}_{B}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x_1(t)\\ \vdots\\ x_l(t)\end{pmatrix}}_{x(t)}$$

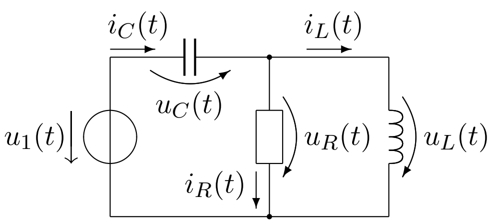
$$\underbrace{\begin{pmatrix}\dot y_1(t)\\ \vdots\\ \dot y_m(t)\end{pmatrix}}_{y(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix}c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{m1} & \cdots & c_{mn}\end{pmatrix}}_{C}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}z_1(t)\\ \vdots\\ z_n(t)\end{pmatrix}}_{z(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix}d_{11} & \cdots & d_{1l}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ d_{m1} & \cdots & d_{ml}\end{pmatrix}}_{D}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x_1(t)\\ \vdots\\ x_l(t)\end{pmatrix}}_{x(t)}$$

Kurzform:

$$\boxed{\begin{aligned}\dot z(t) &= A\cdot z(t) + B\cdot x(t)\\ \dot y(t) &= C\cdot z(t) + D\cdot x(t)\end{aligned}}$$

Zustandsgleichungen des linearen,
zeitkontinuierlichen, dynamischen Systems

Beispiel aus 4.3.1



$$\begin{array}{lcll}
u_1(t) & \Leftrightarrow & x(t) & \text{Eingabe}\\
u_L(t) & \Leftrightarrow & y_1(t) & \multirow{2}{*}{\}\ \text{Ausgabe}}\\
u_C(t) & \Leftrightarrow & y_2(t) & \\
\Phi(t) & \Leftrightarrow & z_1(t) & \multirow{2}{*}{\}\ \text{Zustände}}\\
Q(t) & \Leftrightarrow & z_2(t) &
\end{array}$$

Außerdem gilt: (da lineares System)

$$\begin{aligned}
i_R(t) &= \varphi_R(u_R(t)) = \frac{1}{R}\cdot u(t)\\
i_L(t) &= \varphi_L(\Phi(t)) = \frac{1}{L}\cdot \Phi(t)\\
u_C(t) &= \varphi_C(Q(t)) = \frac{1}{C}\cdot Q(t)
\end{aligned}$$

Damit gilt für die Zustandgleichungen aus 4.3.1:

$$
\begin{aligned}
\dot{\Phi}(t) &= \underbrace{u(t) - \varphi_C(Q(t))}_{} &&= & & -\frac{1}{C}Q(t) & &+u(t) \\
\dot{Q}(t) &= \varphi_L(\Phi(t)) + \varphi_R(u(t) - \varphi_C(Q(t))) &&= &\frac{1}{L}\Phi(t) & -\frac{1}{RC}Q(t) & &+\frac{1}{R}u(t) \\
u_L(t) &= u(t) - \varphi_C(Q(t)) &&= & & -\frac{1}{C}Q(t) & &+u(t) \\
u_C(t) &= \underbrace{\varphi_C(Q(t))}_{\text{allgemein}} &&= & &\underbrace{+\frac{1}{C}Q(t)}_{\text{linearer Fall}} & &
\end{aligned}
$$

Matrizenform:

$$
\begin{pmatrix} \dot{\Phi}(t) \\ \dot{Q}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} \Phi(t) \\ Q(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{R} \end{pmatrix}}_{B} \cdot u(t)
$$

$$
\begin{pmatrix} u_L(t) \\ u_C(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ 0 & -\frac{1}{C} \end{pmatrix}}_{C} \cdot \begin{pmatrix} \Phi(t) \\ Q(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{D} \cdot u(t)
$$

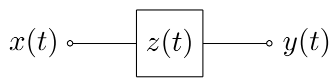
Bemerkung: Bei linearen Bauelementen gilt

$$
\begin{aligned}
\Phi(t) &= L \cdot i_L(t) \\
Q(t) &= C \cdot u_C(t)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ in der Regel $i_L(t)$ bzw. $u_C(t)$ als Zustandssignale verwendet

5.3.2 Differentialgleichung und Realisierung

Sonderfall: 1 Eingang, 1 Ausgang ($l = m = 1$).

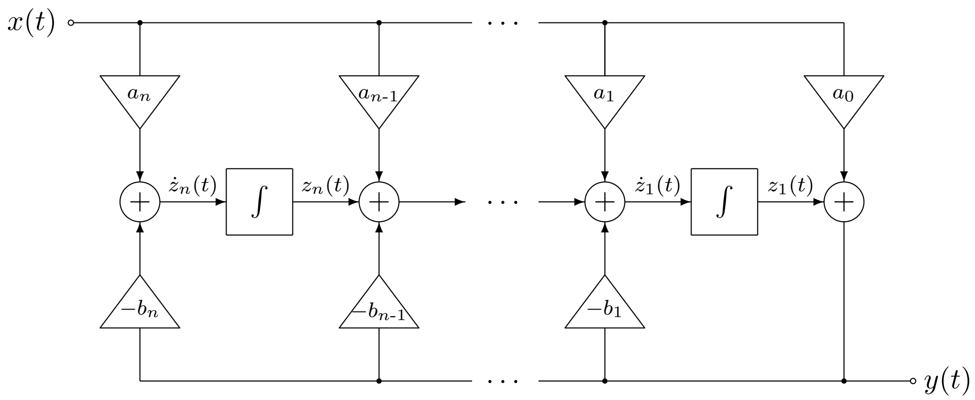


Es gilt: Ein lineares, zeitkontinuierliches, dynamisches System mit $l = m = 1$ (n beliebig) kann durch eine Differentialgleichung folgenden Typs beschrieben werden:

$$
\begin{aligned}
&y^{(n)}(t) + b_1 y^{(n-1)}(t) + b_2 y^{(n-2)}(t) + \cdots + b_{n-1}\dot{y}(t) + b_n y(t) = \\
&\qquad a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + a_2 x^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1}\dot{x}(t) + a_n x(t)
\end{aligned}
$$

$(a_i,\ b_i \in \mathbb{R},\ b_0 = 1)$

Ansatz: Blockschaltbild $\rightarrow$ Differentialgleichungen, Zustandsgleichungen



Beschreibung des Blockschaltbildes

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1(t) &= z_2(t) + a_1 \cdot x(t) - b_1 \cdot y(t) && (1)\\
\dot{z}_2(t) &= z_3(t) + a_2 \cdot x(t) - b_2 \cdot y(t) && (2)\\
&\vdots\\
\dot{z}_{n-1}(t) &= z_n(t) + a_{n-1} \cdot x(t) - b_{n-1} \cdot y(t) && (n-1)\\
\dot{z}_n(t) &= a_n \cdot x(t) - b_n \cdot y(t) && (n)\\
y(t) &= z_1(t) + a_0 \cdot x(t) && (n+1)
\end{aligned}$$

Übergang zur Differentialgleichung: Ziel: Elimination der $z_1, \ldots, z_n$

- Gleichung $(n+1)$ differenzieren: $\dot{y}(t) = \dot{z}_1(t) + a_0 \cdot \dot{x}(t)$
- Gleichung (1) einsetzen:

$$\dot{y}(t) = z_2(t) + a_1 \cdot x(t) - b_1 \cdot y(t) + a_0 \cdot \dot{x}(t) \qquad (n+2)$$

- Gleichung $(n+2)$ differenzieren: $\ddot{y}(t) = \dot{z}_2(t) + a_1 \cdot \dot{x}(t) - b_1 \cdot \dot{y}(t) + a_0 \cdot \ddot{x}(t)$
- Gleichung (2) einsetzen
- $\cdots$

Nach n Schritten sind alle Zustandssignale eliminiert $\Rightarrow$ DGL fertig

Übergang zu den Zustandsgleichungen: Einsetzen von $(n+1)$ in Gleichungen (1) bis (n):

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1}(t) \\ \dot{z}_n(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -b_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -b_{n_1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_{n-1}(t) \\ z_n(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 - b_1 a_0 \\ a_2 - b_2 a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} - b_{n-1} a_0 \\ a_n - b_n a_0 \end{pmatrix}}_{B} \cdot x(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C} \cdot \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_{n-1}(t) \\ z_n(t) \end{pmatrix} + \underbrace{(a_0)}_{D} \cdot x(t)$$