

Systemtheorie II – SS 05
Prof. Dr.-Ing. habil. Hoffmann, TU Dresden
Mitschrift

Fabian Kurz
<http://fkurz.net/>

Zuletzt aktualisiert:
16. Juli 2005

Inhaltsverzeichnis

5.4	Systembeschreibung im Bildbereich	1
5.4.1	Lösung der Zustandsgleichungen	1
5.4.2	Übertragungsfunktion	2
5.4.3	Verallgemeinerte symbolische Methode	3
5.4.4	Stationärer und flüchtiger Vorgang	5
5.4.5	Frequenzcharakteristiken	7
5.5	Systemeigenschaften und Klassifizierung	8
5.5.1	Stabilität	8
5.5.2	Stabilitätskriterien	8
5.5.3	Allpass und Mindestphasensystem	10
Teil 3: Zeitdiskrete Systeme		12
6	Zeitdiskrete Signale und Systeme	12
6.1	Signalbeschreibung im Zeitbereich	12
6.1.1	Zeitdiskrete Signale	12
6.1.2	Spezielle Signale	12
6.2	Statische zeitdiskrete Systeme	14
6.2.1	Elementarsysteme	14
6.2.2	Alphabetabbildung	14
6.3	Dynamische zeitdiskrete Systeme	15
6.3.1	Zustandsbeschreibung	15
6.3.2	Lineares zeitdiskretes System 1. Ordnung	16
6.3.3	Nichtlineares zeitdiskretes System 1. Ordnung	17
7	Lineare zeitdiskrete Systeme	19
7.1	Signalbeschreibung im Bildbereich	19
7.1.1	Z-Transformation	19
7.1.2	Rechenregeln der z-Transformation	20
7.1.3	Inverse z-Transformation	22
7.1.4	c) Residuenmethode	22
7.2	Systembeschreibung im Zeitbereich	23
7.2.1	Zustandsgleichungen	23
7.2.2	Differenzgleichung und Realisierung	24
7.3	Systembeschreibung im Bildbereich	25
7.3.1	Lösung der Zustandsgleichungen	25
7.3.2	Übertragungsfunktion ($l=m=1$)	26
7.3.3	Flüchtiger und stationärer Vorgang	28
7.3.4	Frequenzcharakteristiken	29
7.4	Systemeigenschaften und Klassifizierung	31
7.4.1	Stabilität	31
7.5	Allpass und Mindestphasensystem	32
7.5.1	Rekursion und nicht-rekursive Systeme	34
7.5.2	Linearphasige Systeme	35

7.6	Zusammenhänge zwischen zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten Systemen	36
7.6.1	Zeitbereich	36
7.6.2	Bildbereich (lineare Systeme)	36

5.4 Systembeschreibung im Bildbereich

5.4.1 Lösung der Zustandsgleichungen

Gleichungen aus 5.3.1:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A \cdot z(t) + B \cdot x(t) \\ y(t) = C \cdot z(t) + D \cdot x(t) \end{cases}$$

Zustandsgleichungen eines linearen Systems

\mathcal{L} -Transformation der ersten Gleichung: $\mathcal{L}\{z(t)\} = Z(s)$, $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$,
Anfangszustand $z(0) = z(+0)$.

$$\begin{aligned} s \cdot Z(s) - z(0) &= A \cdot Z(s) + B \cdot X(s) \\ s \cdot Z(s) - A \cdot Z(s) &= B \cdot X(s) + z(0) \\ (s \cdot E - A) \cdot Z(s) &= z(0) + B \cdot X(s) \\ \Rightarrow Z(s) &= \underbrace{(s \cdot E - A)^{-1}}_{\Phi(s)} \cdot z(0) + (s \cdot E - A)^{-1} \cdot B \cdot X(s) \end{aligned}$$

$\Phi(s)$: *Fundamentalmatrix* im Bildbereich

\mathcal{L} -Transformation der zweiten Gleichung mit $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$:

$$Y(s) = C \cdot Z(s) + D \cdot X(s)$$

$Z(s)$ einsetzen:

$$Y(s) = C \cdot \Phi(s) \cdot z(0) + \underbrace{[C \cdot (S \cdot E - A)^{-1} \cdot B + D]}_{G(s)} \cdot X(s)$$

$G(s)$: *Übertragungsmatrix*

$$Y(s) = C \cdot \Phi(s) \cdot z(0) + G(s) \cdot X(s)$$

Input-Output-Gleichung im Bildbereich

Inverse Laplace-Transformation:

$$y(t) = \underbrace{C \cdot \varphi(t)}_{\text{freie Ausgabe}} \cdot z(0) + \underbrace{\int_0^t g(t-\tau) \cdot x(\tau) d\tau}_{\text{erzwungene Ausgabe}}$$

Input-Output-Gleichung im Zeitbereich

$\varphi(t)$: *Fundamentalmatrix* im Zeitbereich

$g(t)$: *Gewichtsmatrix*

Hierbei gilt:

1. $\varphi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\} = e^{At}$ (Exponentialmatrix)

Beweis: Es ist zu zeigen, daß $\mathcal{L}\{e^{At}\} = (s \cdot E - A)^{-1}$.

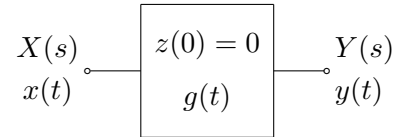
$$\varphi(t) = e^{At} = E + \frac{A \cdot t}{1!} + \frac{A^2 \cdot t^2}{2!} + \frac{A^3 \cdot t^3}{3!} + \dots \quad \text{insbes: } \varphi(0) = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= A + A^2 \cdot t + \frac{A^3 \cdot t^2}{2!} + \dots = A \cdot \left(E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2 \cdot t^2}{2!} + \dots \right) \\ &= A \cdot \varphi(t) \end{aligned}$$

$$s \cdot \Phi(s) - \underbrace{\varphi(0)}_E = A \cdot \Phi(s) \Rightarrow (s \cdot E - A) \cdot \Phi(s) = E \Rightarrow \underline{\underline{\Phi(s) = (s \cdot E - A)^{-1}}}$$

$$2. g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{C \cdot \Phi(s) \cdot B + D\} = C \cdot \varphi(t) \cdot B + D \cdot \delta(t)$$

Wichtiger Sonderfall: System im Nullzustand, $z(0) = 0$,
 $l = m = 1 \rightarrow$ nur ein Ein- und Ausgang.

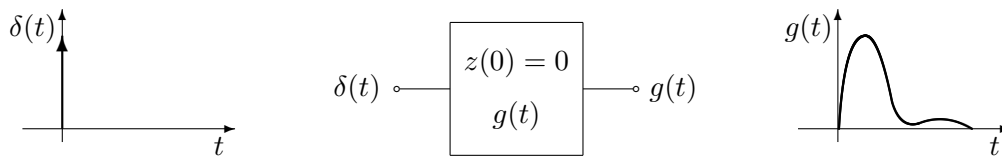


$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s) \cdot X(s) \\ y(t) &= \int_0^t g(t - \tau) x(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$G(s)$: Übertragungsfunktion

$g(t)$: Gewichtsfunktion

Veranschaulichung:



$$Y(s) = G(s) \cdot X(s) = G(s) \cdot \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1, \quad y(t) = g(t)$$

Folgerung: Die Gewichtsfunktion g ist die Reaktion des Systems auf das Impulssignal $\delta(t)$ und heißt deshalb auch *Impulsantwort*.

Ist die Reaktion des Systems auf das Impulssignal bekannt, d.h. ist $g(t)$ gegeben, kann die Reaktion des Systems auf ein beliebiges Eingangssignal $x(t)$ berechnet werden:

$$y(t) = (g * x)(t)$$

5.4.2 Übertragungsfunktion

Es gelte weiterhin: $z(0) = 0$, $l = m = 1$.

Ermittlung von $G(s)$

1. Aus Zustandsgleichungen: $G(s) = C \cdot (s \cdot E - A)^{-1} \cdot B + D$.

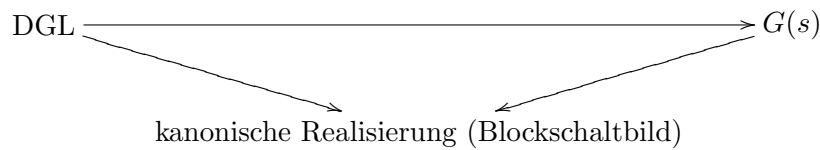
2. Aus Eingabe und Ausgabe: $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\mathcal{L}\{\text{Wirkung}\}}{\mathcal{L}\{\text{Ursache}\}}$

3. Aus der Differentialgleichung (dem Blockschaltbild aus 5.3.2):

- \mathcal{L} der Gleichungen (1) bis $(n + 1)$.
- $z_1(0) = z_2(0) = \dots = z_n(0) = 0$
- $z_1(s), z_2(s), \dots$ schrittweise durch Einsetzen eliminieren
- Abschließend umordnen zu $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$:

$$G(s) = \frac{a_n s^{-n} + a_{n-1} s^{-(n-1)} + \dots + a_1 s^{-1} + a_0}{b_n s^{-n} + b_{n-1} s^{-(n-1)} + \dots + b_1 s^{-1} + 1} \quad (b_0 = 1)$$

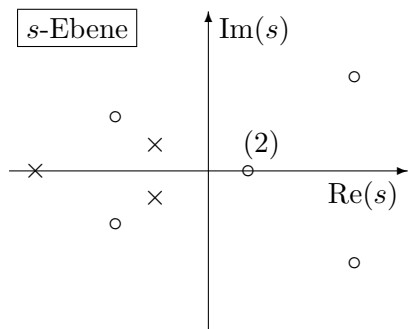
Ergebnis:



$$G(s) = \frac{a_n s^{-n} + a_{n-1} s^{-(n-1)} + \dots + a_1 s^{-1} + a_0}{b_n s^{-n} + b_{n-1} s^{-(n-1)} + \dots + b_1 s^{-1} + 1} = \frac{a_n + a_{n-1} s + \dots + a_1 s^{n-1} + a_0 s^n}{b_n + b_{n-1} s + \dots + b_1 s^{n-1} + 1 s^n}$$

$$= a_0 \cdot \frac{(s - s_1')(s - s_2') \dots (s - s_n')}{(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)} \quad s_i' : \text{Nullstellen, } \circ \quad s_i : \text{Polstellen, } \times$$

Darstellung zweckmäßig in Pol-Nullstellen-Plan (PN-Plan)

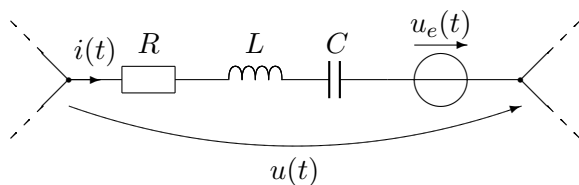


- Pole und Nullstellen reell oder paarweise konjugiert komplex
- können auch mehrfach sein
- aus PN-Plan können wichtige Systemeigenschaften abgelesen werden (z.B. Stabilität)

5.4.3 Verallgemeinerte symbolische Methode

Ziel: Berechnungen von $G(s)$ für lineare RLC-Netzwerke

Allgemeiner Netzwerkzweig



Voraussetzung: Für $t < 0$ sei:

$$u_e(t) = 0, u_C(0) = 0, i_L(0) = 0.$$

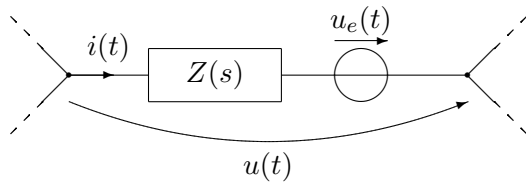
$$u(t) = i(t) \cdot R + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau) d\tau + u_C(t)$$

\mathcal{L} -Transformation:

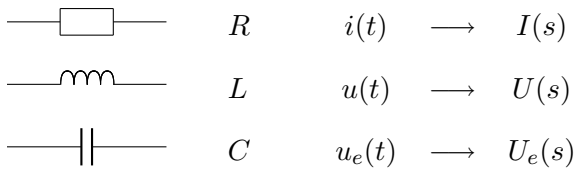
$$U(s) = I(s) \cdot R + L \cdot (s \cdot I(s) - \underbrace{i_L(0)}_0) + \frac{1}{C} \cdot 1s \cdot I(s) + U_e(s)$$

$$= \underbrace{\left(R + s \cdot L + \frac{1}{s \cdot C} \right)}_{\text{Zweigimpedanz } Z(s)} \cdot I(s) + U_e(s)$$

Symbolischer Netzwerkzweig



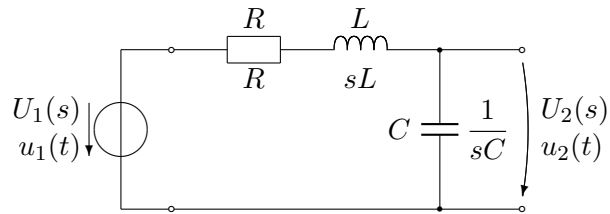
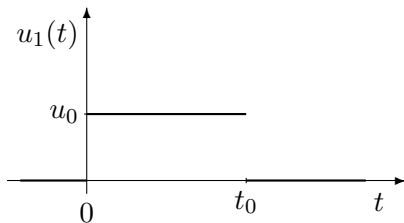
Zuordnungen:



Damit gelten Regeln, wie im Gleichstromnetzwerk:

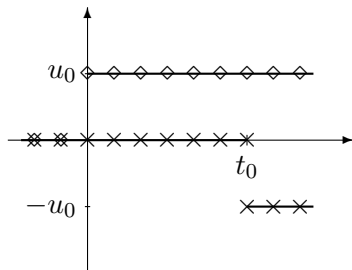
- Spannungsteilerregel
- Stromteilerregel
- Zweipoltheorie etc.

Beispiel: Übertragung eines Rechteckimpulses über einen Tiefpass



Nebenbedingung: $(\frac{R}{2L})^2 < \frac{1}{LC}$ (s. weiter unten)

1. Berechnung von $U_1(s)$



$$u_1(t) = \underbrace{u_0 \cdot \mathbb{1}(t)}_{\diamond} - \underbrace{u_0 \cdot (t - t_0)}_{\times}$$

$$\Rightarrow U_1(s) = \frac{U_0}{s} - \frac{U_0}{s} \cdot e^{-st_0}$$

2. Berechnung von $G(s)$: Spannungsteilerregel

$$G(s) = \frac{U_1(s)}{U_2(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{s^2LC + sRC + 1}$$

3. Berechnung von $U_2(s)$

$$U_2(s) = G(s) \cdot U_1(s) = \underbrace{\frac{1}{s^2LC + sRC + 1}}_{F(s)} \cdot \frac{U_0}{s} - \underbrace{\frac{1}{s^2LC + sRC + 1}}_{F(s)} \cdot \frac{U_0}{s} \cdot e^{-st_0}$$

4. Berechnung von $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

$$F(s) = \frac{U_0}{sLC (s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC})} = \frac{U_0}{LC} \cdot \frac{1}{s \cdot (s - s_1)(s - s_2)}$$

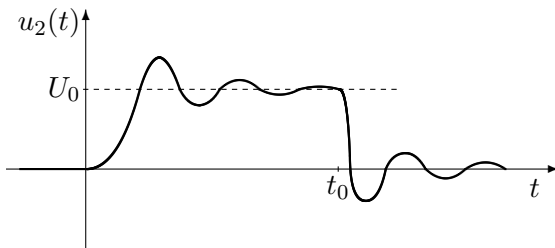
mit $s_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$

Abkürzungen: $\frac{R}{2L} = \sigma_0$, $\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \omega_0$, $s_{1/2} = -\sigma_0 \pm j\omega_0$

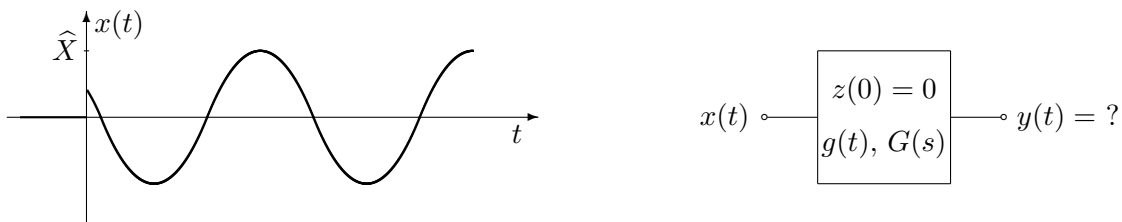
$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \sum \text{Res} (F(s) \cdot e^{st}) = \sum_{\substack{s=0 \\ s_{1/2}}} \text{Res} \left[\frac{U_0}{LC} \cdot \frac{1}{s \cdot (s - s_1)(s - s_2)} \cdot e^{st} \right] \\ &= \frac{U_0}{LC} \left[\frac{1}{s_1 \cdot s_2} + \frac{e^{s_1 t}}{s_1(s_1 - s_2)} + \frac{e^{s_2 t}}{s_2(s_2 - s_1)} \right] \quad \text{--- : konj. kompl.} \\ &= \frac{U_0}{LC} \left[\frac{1}{s_1 \cdot s_2} + 2 \text{Re} \left(\frac{e^{s_1 t}}{s_1(s_1 - s_2)} \right) \right] \quad \text{da } z + z^* = 2 \text{Re}(z) \\ &= U_0 \left[1 + \frac{2}{LC} \cdot \text{Re} \left(\frac{e^{-\sigma_0 t + j\omega_0 t}}{(-\sigma_0 + j\omega_0) \cdot 2j\omega_0} \right) \right] \quad \frac{1}{s_1 s_2} = LC \\ &= U_0 \left[1 - \frac{1}{LC} \cdot \text{Re} \left(\frac{e^{-\sigma_0 t} \cdot e^{j\omega_0 t}}{(j\sigma_0 + \omega_0) \cdot \omega_0} \right) \right] \\ &= U_0 \left[1 - \frac{e^{-\sigma_0 t}}{\omega_0 LC} \cdot \text{Re} \left(\frac{e^{j\omega_0 t}}{e^{j \arctan \frac{\sigma_0}{\omega_0}} \cdot \sqrt{\sigma_0^2 + \omega_0^2}} \right) \right] \quad \sqrt{\sigma_0^2 + \omega_0^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ &= U_0 \left[1 - \frac{e^{-\sigma_0 t}}{\omega_0 \sqrt{LC}} \cdot \text{Re} \left(e^{j\omega_0 t - \arctan \frac{\sigma_0}{\omega_0}} \right) \right] \\ &= U_0 \left[1 - \frac{e^{-\sigma_0 t}}{\omega_0 \sqrt{LC}} \cdot \cos \left(\omega_0 t - \arctan \frac{\sigma_0}{\omega_0} \right) \right] \quad t > 0 \end{aligned}$$

5. Berechnung von $u_2(t)$ (Verschiebungssatz)

$$\begin{aligned} u_2(t) &= U_0 \left[1 - \frac{e^{-\sigma_0 t}}{\omega_0 \sqrt{LC}} \cdot \cos \left(\omega_0 t - \arctan \frac{\sigma_0}{\omega_0} \right) \right] \cdot \mathbb{1}(t) \\ &\quad - U_0 \left[1 - \frac{e^{-\sigma_0 t}}{\omega_0 \sqrt{LC}} \cdot \cos \left(\omega_0 t - \arctan \frac{\sigma_0}{\omega_0} \right) \right] \cdot \mathbb{1}(t - t_0) \end{aligned}$$



5.4.4 Stationärer und flüchtiger Vorgang



Komplexe Amplituden: $\underline{X} = \hat{X} \cdot e^{j\varphi_x}$, $\underline{X}^* = \hat{X} \cdot e^{-j\varphi_x}$

$$x(t) = \hat{X} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_x) \cdot \mathbb{1}(t) = \frac{\hat{X}}{2} \cdot (e^{j\omega_0 t + j\varphi_x} + e^{-j\omega_0 t - j\varphi_x})$$

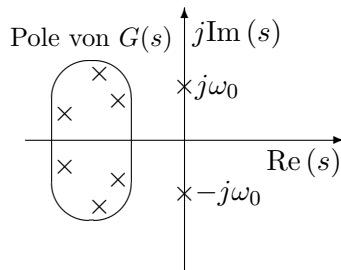
$$= \frac{1}{2} (\underline{X} \cdot e^{j\omega_0 t} + \underline{X}^* \cdot e^{-j\omega_0 t})$$

\mathcal{L} -Transformation:

$$X(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{\underline{X}}{s - j\omega_0} + \frac{\underline{X}^*}{s + j\omega_0} \right), \quad Y(s) = G(s) \cdot X(s)$$

$$y(t) = \sum \text{Res} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\underline{X}}{s - j\omega_0} + \frac{\underline{X}^*}{s + j\omega_0} \right) \cdot G(s) \cdot e^{st} \right]$$

$$= \underbrace{\sum_{s_i = \text{Pole von } G(s)} \text{Res}[\dots]}_{\text{Flüchtiger Vorgang } g_{ft}(t)} + \underbrace{\sum_{s = \pm j\omega_0} \text{Res}[\dots]}_{\text{Stationärer Vorgang } y_{st}(t)}$$



Flüchtiger Vorgang: $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{ft}(t) = 0$ wegen $\text{Re}(s_i) < 0$

\Rightarrow Stabiles System, vgl. 5.5.1

Stationärer Vorgang:

$$y_{st}(t) = \sum_{\substack{s=j\omega_0 \\ s=-j\omega_0}} \text{Res} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\underline{X}}{s - j\omega_0} + \frac{\underline{X}^*}{s + j\omega_0} \right) \cdot G(s) \cdot e^{st} \right]$$

$$= \frac{1}{2} (\underline{X} \cdot G(j\omega_0) \cdot e^{j\omega_0 t} + \underline{X}^* \cdot G(-j\omega_0) \cdot e^{-j\omega_0 t}) = \frac{1}{2} \cdot \hat{X} \cdot \text{Re} (\underline{X} \cdot G(j\omega_0) \cdot e^{j\omega_0 t})$$

$$= \text{Re} \left(\hat{X} \cdot e^{j\varphi_x} \cdot |G(j\omega_0)| \cdot e^{j \arg G(j\omega_0)} \cdot e^{j\omega_0 t} \right)$$

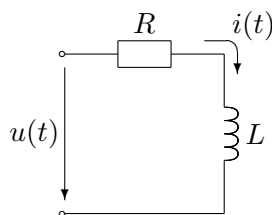
$$= \hat{X} \cdot |G(j\omega_0)| \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_x + \arg G(j\omega_0))$$

Im eingeschwingenen (stationären) Fall erscheint als Systemreaktion

$$y_{st}(t) = \hat{Y} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_y) \quad \text{mit } \hat{Y} = \hat{X} \cdot |G(j\omega_0)| \text{ and } \varphi_y = \varphi_x + \arg G(j\omega_0)$$

Anwendung: Wechselstromlehre

Beispiel:



$$x(t) \Leftrightarrow u(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_u)$$

$$y(t) \Leftrightarrow i(t) = ?$$

$$\text{Ansatz: } i(t) = \hat{I} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_i)$$

$$G(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{1}{R + sL} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{R + j\omega L}$$

$$|G(j\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (j\omega_0 L)^2}}, \quad \arg G(j\omega_0) = -\arctan \frac{\omega_0 L}{R}$$

$$\hat{I} = \hat{U} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 + (j\omega_0 L)^2}}, \quad \varphi_i = \varphi_u - \arctan \frac{\omega_0 L}{R}$$

Ergebnis:
$$i(t) = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + (j\omega_0 L)^2}} \cdot \cos \left(\omega_0 t + \varphi_u - \arctan \frac{\omega_0 L}{R} \right)$$

5.4.5 Frequenzcharakteristiken

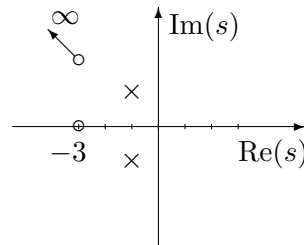
Es sei $\omega_0 = \omega$ variabel.

Definitionen:

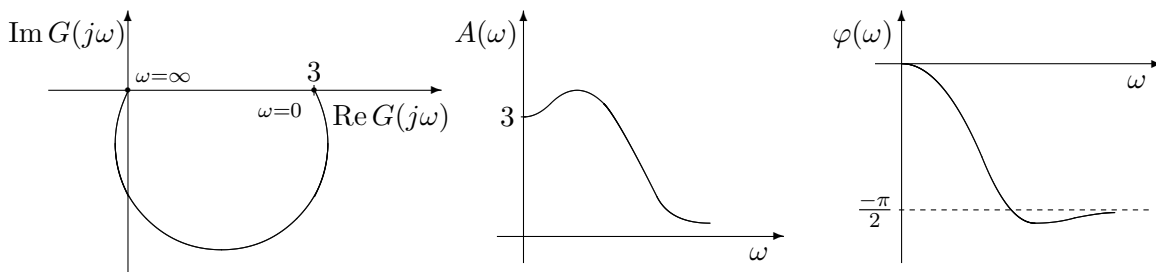
1. $G(j\omega)$ heißt *komplexer Frequenzgang* des linearen Systems. Schreibweise auch $G(\omega)$, Bezeichnung auch *Übertragungsfunktion*. Die Darstellung von $G(j\omega)$ in der komplexen Ebene heißt *Ortskurve*.
2. $|G(j\omega)| = \frac{\hat{Y}}{\hat{X}} = A(\omega)$ heißt *Amplitudenfrequenzgang*.
3. $\arg G(j\omega) = \varphi_y - \varphi_x = \varphi(\omega)$ heißt *Phasenfrequenzgang*.
4. $a(\omega) = -\log A(\omega)$ heißt *Dämpfungsmaß* in Neper,
 $a(\omega) = -20 \lg A(\omega)$ heißt *Dämpfungsmaß* in Dezibel,
 $b(\omega) = -\varphi(\omega)$ heißt *Phasenmaß*.

Beispiel:

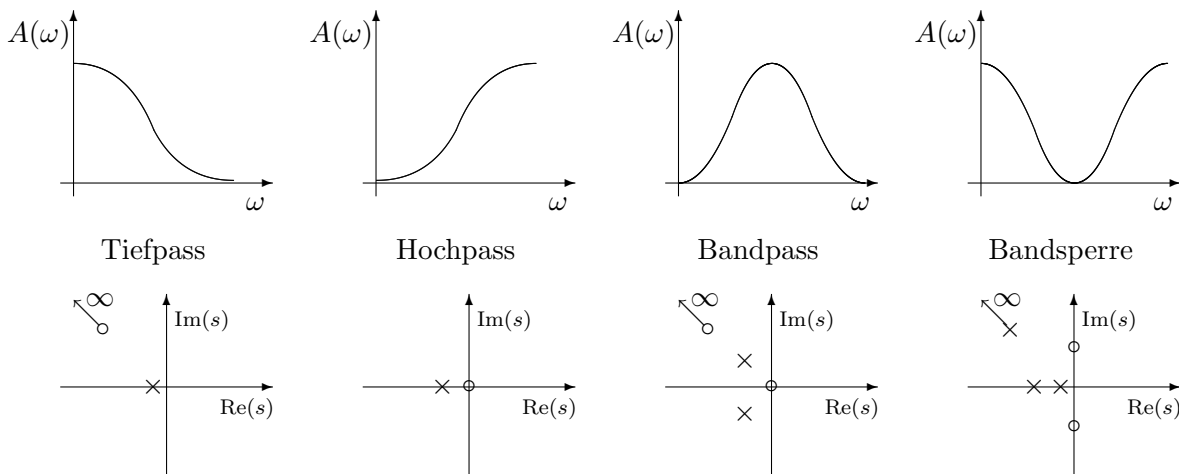
$$G(s) = \frac{s+3}{s^2+s+1} = \frac{s+3}{(s+\frac{1}{2}(1+j\sqrt{3}))(s+\frac{1}{2}(1-j\sqrt{3}))}$$



$$G(j\omega) = \frac{j\omega+3}{-\omega^2+j\omega+1}, \quad |G(j\omega)| = A(\omega) = \sqrt{\frac{\omega^2+9}{(1-\omega^2)^2+\omega^2}}, \quad \varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$$

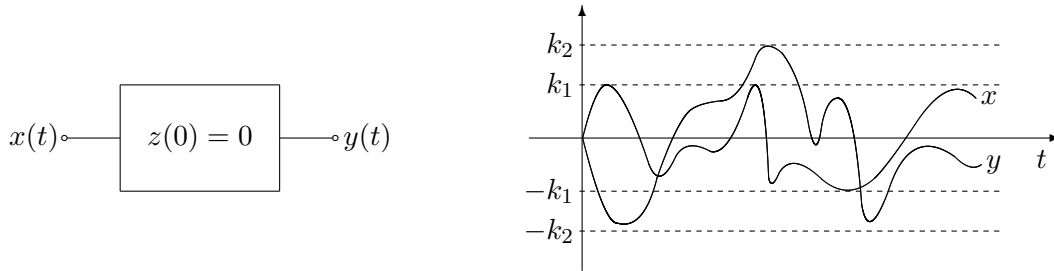


Einteilung nach $A(\omega)$



5.5 Systemeigenschaften und Klassifizierung

5.5.1 Stabilität



Definition: Ein zeitkontinuierliches System heißt *stabil*, falls

$$|x(t)| \leq k_1 \quad \Rightarrow \quad |y(t)| \leq k_2, \quad (t \geq 0)$$

genauer: BIBO-Stabilität (bounded input - bounded output).

Voraussetzung

- 1) $|x(t)|$ beschränkt $\Rightarrow X(s)$ hat keine singulären Stellen mit $\text{Re}(s) > 0$.
- 2) $Y(s) = G(s) \cdot X(s)$ sei rational in s und verschwinde im Unendlichen

Dann gilt: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \sum \text{Res}[G(s) \cdot X(s) \cdot e^{st}]$

Folgerung

- Das System ist stabil, wenn für alle Pole s_i von $G(s)$ gilt: $\text{Re}(s_i) < 0$
- Das System ist instabil, wenn für mindestens einen Pol s_i von $G(s)$ gilt: $\text{Re}(s_i) > 0$

Aus 5.4.2: $G(s) = \frac{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}{s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}$ ← charakteristisches Polynom des Systems

Kriterium: Hat das charakteristische Polynom nur Nullstellen mit negativem Realteil, ist das System stabil. Dann heißt das Polynom HURWITZ-Polynom.

5.5.2 Stabilitätskriterien

a) Hurwitz-Kriterium

Ein reellwertiges Polynom (mit $b_i > 0, i = 0, \dots, n$)¹

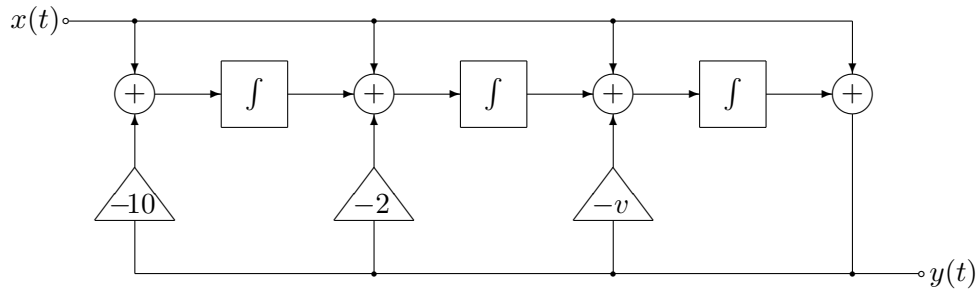
$$f(s) = b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n$$

hat genau dann nur Nullstellen mit negativem Realteil, wenn die Abschnittsdeterminanten D_j ($j = 1, \dots, n$) der folgenden Determinante D positiv sind.

$$D = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_5 & b_7 & \dots \\ b_0 & b_2 & b_4 & b_6 & \dots \\ 0 & b_1 & b_3 & b_5 & \dots \\ 0 & b_0 & b_2 & b_4 & \dots \\ 0 & 0 & b_1 & b_3 & \dots \\ 0 & 0 & b_2 & b_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} D_1 &= b_1 > 0 \\ D_2 &= \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix} > 0 \\ D_3 &= \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_5 \\ b_0 & b_2 & b_4 \\ 0 & b_1 & b_3 \end{vmatrix} > 0 \end{aligned}$$

¹Folgerung: Ein Polynom mit wechselnden Vorzeichen kann kein HURWITZ-Polynom sein

Beispiel: Welchen Wert darf v annehmen, so daß das System stabil bleibt?



Ablezen der Übertragungsfunktion nach 5.4.2:

$$G(s) = \frac{1 \cdot s^{-3} + 1 \cdot s^{-2} + 1 \cdot s^{-1} + 1}{10 \cdot s^{-3} + 2 \cdot s^{-2} + v \cdot s^{-1} + 1} = \frac{s^3 + s^2 + s^1 + 1}{s^3 + v \cdot s^2 + 2 \cdot s^1 + 10}$$

$$\Rightarrow b_0 = 1, b_1 = v, b_2 = 2, b_3 = 10$$

Abschnittsdeterminaten:

$$D_1 = b_1 = v > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & 10 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2v - 10 > 0 \Rightarrow \boxed{v > 5}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_5 \\ b_0 & b_2 & b_4 \\ 0 & b_1 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & 10 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & v & 10 \end{vmatrix} = 10 \cdot D_2 > 0 \text{ (erfüllt)}$$

b) Routh-Kriterium

Vermeidet die Auswertung großer Determinanten durch Berechnung eines Koeffizientenschemas.

b_n	b_{n-2}	b_{n-4}	\cdots	b_0 oder b_1	0	Erste Zeile: $T_1 = \frac{b_n}{b_{n-1}}, B_1 = b_{n-2} - T_1 \cdot b_{n-3},$ $B_2 = b_{n-4} - T_1 \cdot b_{n-5}$ usw.
b_{n-1}	b_{n-3}	b_{n-5}	\cdots	b_0 oder 0	0	
B_1	B_2	B_3	\cdots	0	0	Zweite Zeile: $T_2 = \frac{b_{n-1}}{B_1}, C_1 = b_{n-3} - T_2 \cdot B_2,$ $C_2 = b_{n-5} - T_2 \cdot B_3$ usw.
C_1	C_2	C_3	\cdots	0	0	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
K_1	0	0	\cdots	0	0	
L_1	0	0	\cdots	0	0	

Satz: Sämtliche Nullstellen des charakteristischen Polynoms haben genau dann negative Realteile, wenn gilt:

- a) Alle Koeffizienten b_i sind positiv
- b) Sämtliche Koeffizienten $B_1, C_1, \dots, K_1, L_1$ des Routh-Schemas sind positiv

Beispiel: (Fortsetzung)

10	v	0	} Stabilitätsbedingung: $v - 5 > 0 \Leftrightarrow \boxed{v > 5}$
2	1	0	
$v - 5$	0	0	
1	0	0	

$$T_1 = 5$$

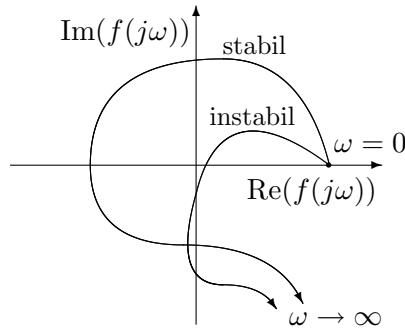
$$T_2 = \frac{2}{v-5}$$

c) Ortskurvenkriterium

Gegeben: charakteristisches Polynom des Systems: $f(s)$

Kriterium: Durchläuft die Ortskurve von $f(j\omega)$ für $0 \leq \omega \leq \infty$ genau n Quadranten im mathematisch positiven Sinn, ist das System stabil (n : Grad von $f(s)$).

Beispiel: $n = 4$

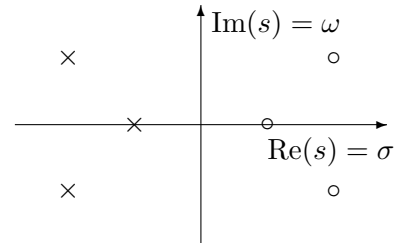


5.5.3 Allpass und Mindestphasensystem

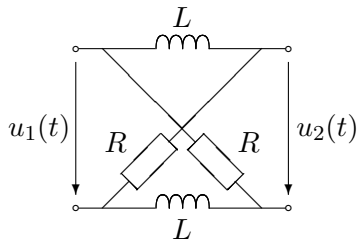
Definition: Ein zeitkontinuierliches System heißt *Allpass* (AP), wenn $|G(j\omega)| = 1$ ($\omega \in \mathbb{R}$).

Allgemeine Form: $G(s) = \frac{f(-s)}{f(s)}$

\Rightarrow Pole und Nullstellen spiegelbildlich zur imaginären Achse.

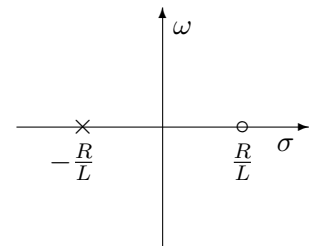


Beispiel: (ähnlich wie Übungsaufgabe 5.19)



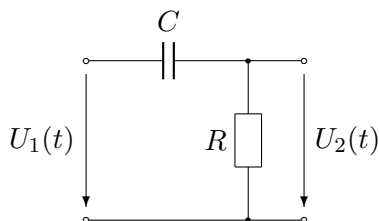
$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R - sL}{R + sL}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = 1$$

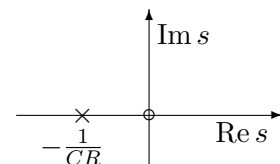


Definition: Ein stabiles System, dessen Übertragungsfunktion G keine Nullstellen s_i mit $\text{Re}(s_i) > 0$ hat, heißt Mindestphasensystem (MPS).

Schaltungsbeispiel



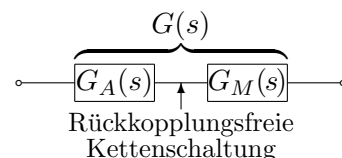
$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{sRC}{1 + sRC}$$



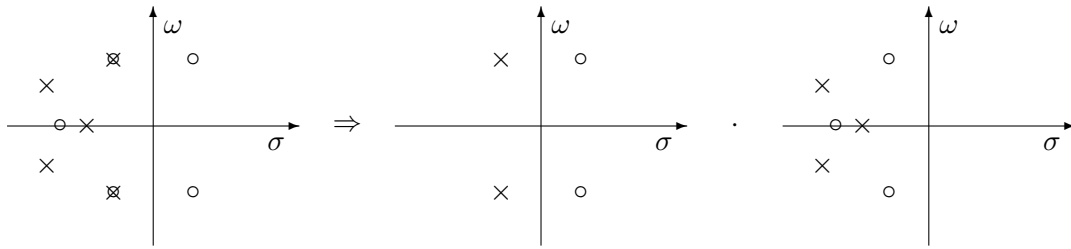
Satz: Die Übertragungsfunktion G eines beliebigen linearen, zeitkontinuierlichen Systems läßt sich in der Form $G(s) = G_A(s) \cdot G_M(s)$ darstellen, wobei gilt:

$G_A(s)$ Übertragungsfunktion eines Allpasses

$G_M(s)$ Übertragungsfunktion eines MPS



Beispiel



Aufgabe: Berechnung von $G(s)$ aus $A(\omega) = |G(s)|$ bzw. $a(\omega) \rightarrow$ Filterentwurf.
Nicht eindeutig lösbar, da $G_1(s)$ und $G_2(s)$ gleiches $A(\omega)$ haben, wenn

$$G_2(s) = G_1(s) \cdot G_A(s) \Rightarrow |G_2(j\omega)| = |G_1(j\omega)| \cdot \underbrace{|G_A(j\omega)|}_1 = A(\omega)$$

Aber: Für MPS ist Berechnung von $G(s)$ aus $A(\omega)$ eindeutig. Dann ist auch $b(\omega)$ eindeutig mit bestimmt. Der Zusammenhang zwischen $a(\omega)$ und $b(\omega)$ lautet:

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(\omega_0)}{\omega_0 - \omega} d\omega_0 \quad (\text{Hilbert Transformation})$$

Teil 3: Zeitdiskrete Systeme

6 Zeitdiskrete Signale und Systeme

6.1 Signalbeschreibung im Zeitbereich

6.1.1 Zeitdiskrete Signale

Zeitskala: $T \subseteq \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Sonderfälle: $T = \mathbb{Z}$, $T = \mathbb{N}_0$

Alphabet: $X \subseteq \mathbb{C}$, wichtiger Sonderfall: $X = \mathbb{R}$

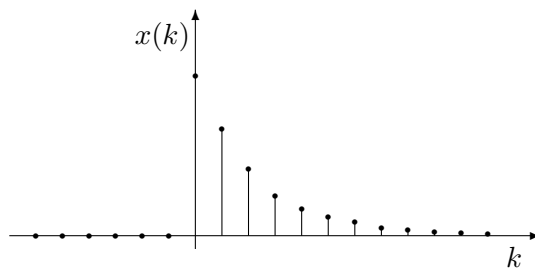
Definition: Ein zeitdiskretes Signal ist eine Abbildung $x : T \rightarrow X$, bei der jedem *Zeitpunkt* $k \in T$ ein *Signalwert* $x(k)$ zugeordnet ist.

Darstellung

a) als Folge $x = (\dots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots)$

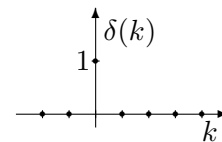
b) analytisch, z.B. $x(k) = \begin{cases} a^k & k \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

c) grafisch:

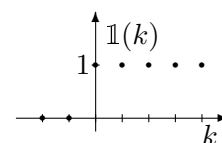


6.1.2 Spezielle Signale

a) Impulssignal $x(k) = \delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$



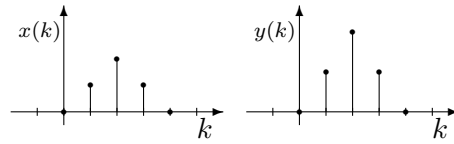
b) Sprungsignal $x(k) = \mathbb{1}(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$



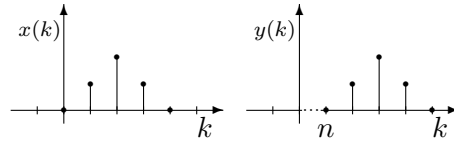
Signaloperationen

Einstellige Signaloperationen

a) Skalarmultiplikation $y(k) = \alpha \cdot x(k)$



b) Translation $y = s^n \cdot x$, d.h.
 $y(k) = x(k - n)$



c) Vorwärtsdifferenz $y = \Delta x : y(k) = x(k + 1) - x(k)$

d) Rückwärtsdifferenz $y = \nabla x : y(k) = x(k) - x(k - 1)$

e) Summation $y = \sum x : y(k) = \sum_{i=-\infty}^k x(i)$

Zweistellige Operationen

a) Signaladdition $y = x_1 + x_2 : y(k) = x_1(k) + x_2(k)$

b) Signalmultiplikation $y = x_1 \cdot x_2 : y(k) = x_1(k) \cdot x_2(k)$

c) (diskrete) Faltung $y = x_1 * x_2 : y(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_1(i)x_2(k-i) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_1(k-i)x_2(i)$

Sonderfall: „kausale Signale“ ($x_1 = x_2 = 0$ für $k < 0$):

$$y(k) = (x_1 * x_2)(k) = \sum_{i=0}^{\infty} x_1(k-i)x_2(i)$$

Veranschaulichung der Faltung

$$y(k) = x_1(k) \cdot x_2(0) + x_1(k-1) \cdot x_2(1) + x_1(k-2) \cdot x_2(2) + \dots + x_1(1) \cdot x_2(k-1) + x_1(0) \cdot x_2(k)$$

$$\begin{array}{c} \longleftarrow \boxed{x_1(0) \ x_1(1) \ x_1(2) \ \dots} \\ \boxed{\dots \ x_2(2) \ x_2(1) \ x_2(0)} \longrightarrow \end{array}$$

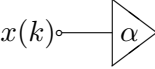
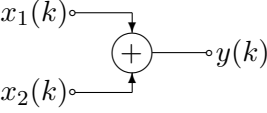
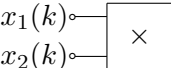
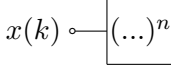
Für $k = 2$: $y(2) = x_1(0) \cdot x_2(2) + x_1(1) \cdot x_2(1) + x_1(2) \cdot x_2(0)$

$$\begin{array}{c} \boxed{x_1(0) \ x_1(1) \ x_1(2) \ x_1(3) \ \dots} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \boxed{\dots \ x_2(3) \ x_2(2) \ x_2(1) \ x_2(0)} \end{array}$$

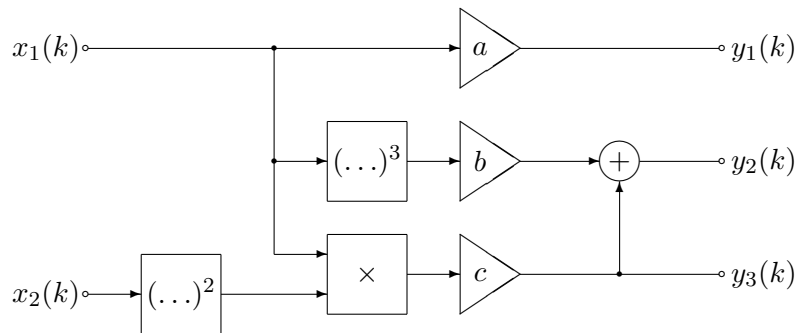
6.2 Statische zeitdiskrete Systeme

6.2.1 Elementarsysteme

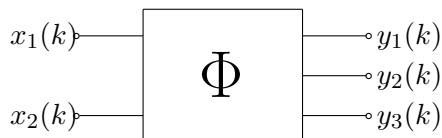
Grundbausteine: (analog zu 4.2.1)

Signalabbildung	Gleichung	Schaltsymbol	Bezeichnung
Skalarmultiplikation	$y(k) = \alpha \cdot x(k), \alpha \in \mathbb{R}$		Verstärker
Signaladdition	$y(k) = x_1(k) + x_2(k)$		Verstärker
Signalmultiplikation	$y(k) = x_1(k) \cdot x_2(k)$		Multiplizierglied
Sonderfall	$y(k) = [x(k)]^n$		Potenzierglied

Zusammenschaltung(Beispiel)



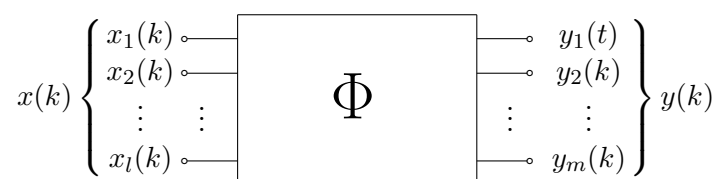
$$\begin{aligned}
 y_1(k) &= a \cdot x_1(k) & &= f_1(x_1(k), x_2(k)) \\
 y_2(k) &= b \cdot x_1^3(k) + c \cdot x_1(k) \cdot x_2^2(k) & &= f_2(x_1(k), x_2(k)) \\
 y_3(k) &= c \cdot x_1(k) \cdot x_2^2(k) & &= f_3(x_1(k), x_2(k))
 \end{aligned}$$



$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

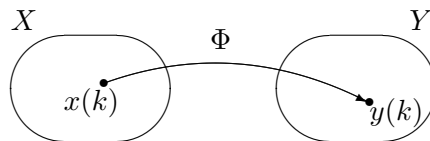
6.2.2 Alphabetabbildung

Verallgemeinerung



Definitionen:

- a) Eingangsalphabet $X = \mathbb{R}^l$, Buchstaben (Signalwerte) $x(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_l(k) \end{pmatrix} \in X$
- b) Ausgabealphabet $Y = \mathbb{R}^m$, Buchstaben (Signalwerte) $y(k) = \begin{pmatrix} y_1(k) \\ \vdots \\ y_m(k) \end{pmatrix} \in Y$
- c) Alphabetabbildung $\Phi : \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^m, \Phi(X(k)) = g(k)$
- d) Abstraktes statisches System (X, Y, Φ)



Beachte Analogie zu zeitkontinuierlichen Systemen!

- e) l -dimensionales Eingangssignal $x : T \rightarrow X$ mit $X = \mathbb{R}^l$.

$$x = \begin{pmatrix} (\dots, x_1(-1), x_1(0), x_1(1), x_1(2), \dots) \\ \vdots \\ (\dots, x_2(-1), x_2(0), x_2(1), x_2(2), \dots) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_l \end{pmatrix}$$

- f) m -dimensionales Ausgangssignal: $y : T \rightarrow Y$ mit $Y = \mathbb{R}^m$. ($y = \dots$ analog)

- g) Signorräume

$X^* = X^T$ Eingangssignorraum (Menge aller Eingangssignale)

$Y^* = Y^T$ Ausgangssignorraum (Menge aller Ausgangssignale)

- h) Signalabbildung: $\Phi : X^* \longrightarrow Y^*$.

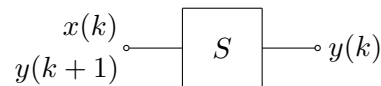
Für ein statisches System gilt:

$y(k) = \Phi(x(k))$

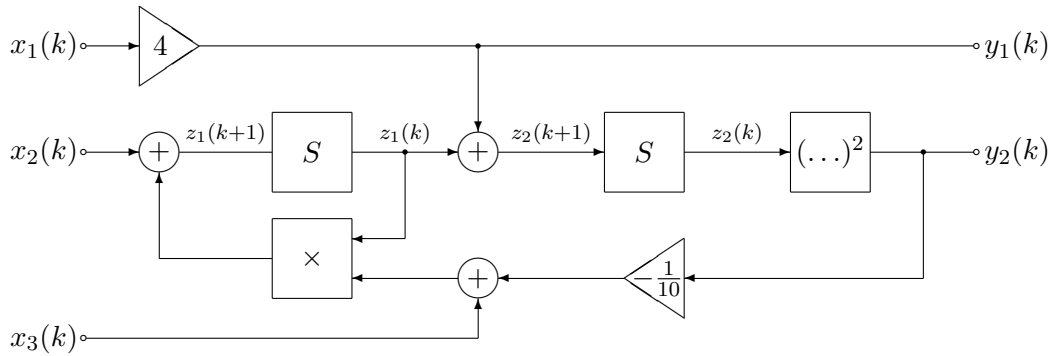
6.3 Dynamische zeitdiskrete Systeme

6.3.1 Zustandsbeschreibung

Zu den in 6.2.1 betrachteten Elementarsystemen kommt der **Speicher** S :



Zusammenschaltung (Beispiel):



$$\begin{aligned} z_1(k+1) &= x_2(k) + z_1(k) \cdot \left[x_3(k) - \frac{1}{10} z_2^2(k) \right] & y_1(k) &= 4 \cdot x_1(k) \\ z_2(k+1) &= z_1(k) + 4 \cdot x_1(k) & y_2(k) &= z_2^2(k) \end{aligned}$$

Es sei $z(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $x(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 \\ -3k^2 \\ 2^k \end{pmatrix} \cdot \mathbb{1}(k)$.

Gesucht: $y(k)$ für $k \geq 0$

k	0	1	2
$x_1(k)$	1	2	...
$x_2(k)$	0	-3	...
$x_3(k)$	1	2	...
$z_1(k)$	3	-4,5	...
$z_2(k)$	0	7	...
$y_1(k)$	4	8	...
$y_2(k)$	25	49	...

Verallgemeinerung

a) Zustandsalphabet $Z = \mathbb{R}^n$

$$\text{Zustand } z(k) = \begin{pmatrix} z_1(k) \\ \vdots \\ z_n(k) \end{pmatrix} \in Z$$

b) n -dimensionales Zustandssignal $z : T \rightarrow Z$ mit $Z = \mathbb{R}^n$

c) Abstraktes dynamisches System (X, Y, Z, f, g) mit:

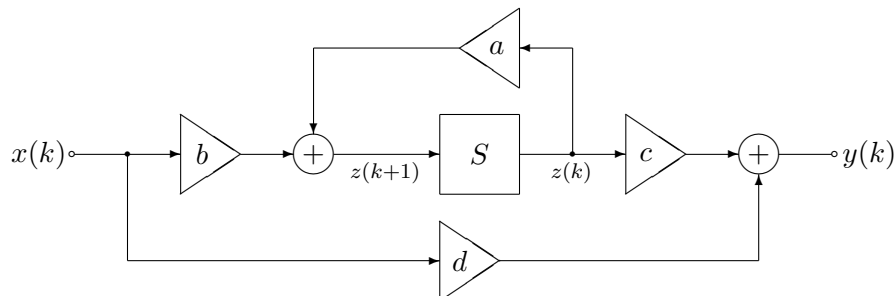
$$f : Z \times X \longrightarrow Z, \quad z(k+1) = f(z(k), x(k))$$

Überföhrungsfunktion

$$g : Z \times X \longrightarrow Y, \quad y(k) = g(z(k), x(k))$$

Ergebnisfunktion

6.3.2 Lineares zeitdiskretes System 1. Ordnung



$$z(k+1) = f(z(k), x(k)) = a \cdot z(k) + b \cdot x(k) \quad f \text{ und } g \text{ sind lineare Funktionen}$$

$$y(k) = g(z(k), x(k)) = c \cdot z(k) + d \cdot x(k)$$

Gegeben: $z(0)$ und $x(k)$ für $k \leq 0$, gesucht: $y(k)$ für $k > 0$.

$$\begin{aligned}
k = 0 : & \quad z(1) = a \cdot z(0) + b \cdot x(0) \\
k = 1 : & \quad z(2) = a \cdot z(1) + b \cdot x(1) = a^2 \cdot z(0) + ab \cdot x(0) + b \cdot x(1) \\
k = 2 : & \quad z(3) = a \cdot z(2) + b \cdot x(2) = a^3 \cdot z(0) + a^2 b \cdot x(0) + ab \cdot x(1) + b \cdot x(2)
\end{aligned}$$

$$z(k) = a^k \cdot z(0) + \sum_{i=0}^{k-1} b \cdot a^{k-i-1} x(i)$$

$$y(k) = c \cdot z(k) = d \cdot x(k) = \underbrace{c \cdot a^k \cdot z(0)}_{\text{freie Ausgabe}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} cb \cdot a^{k-i-1} x(i) + d \cdot x(k)}_{\text{erzwungene Ausgabe}}$$

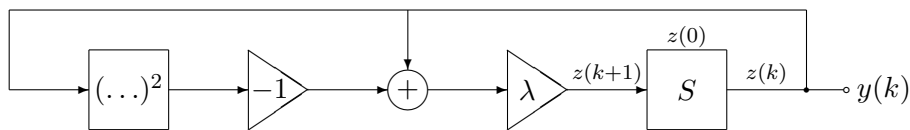
Sonderfall: Autonomes System: $x(k) = 0$ für alle k , es sei $c = 1$.

$$y(k) = z(k) = a^k \cdot z(0)$$

$0 < a < 1$: fallende Ausgabe, $a = 1$: konstante Ausgabe, $1 < a < \infty$: steigende Ausgabe

6.3.3 Nichtlineares zeitdiskretes System 1. Ordnung

Autonomes Beispiel-System:



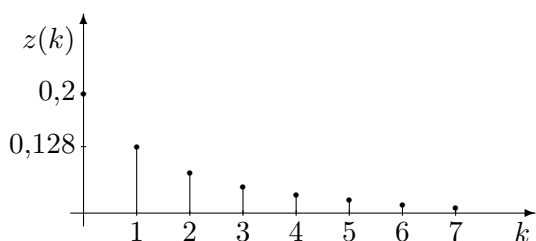
Zustandsgleichungen: $z(k+1) = \lambda \cdot [z(k) - z^2(k)]$, $y(k) = z(k)$

Typische Frage: Existenz von Fixpunkten, d.h. $z(k+1) = z(k)$.

$$z(k) = \lambda \cdot [z(k) - z^2(k)] \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} z(k) &= 0 && \text{(1. Fixpunkt)} \\ z(k) &= 1 - \frac{1}{\lambda} && \text{(2. Fixpunkt)} \end{aligned}$$

Verhaltensformeln für $\lambda > 0$ und $z(0) = 0,2$:

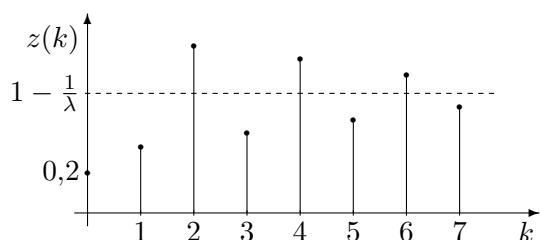
Fall I: $0 < \lambda \leq 1$



$z(k)$ strebt gegen $z = 0$ für $k \rightarrow \infty$

(1. Fixpunkt)

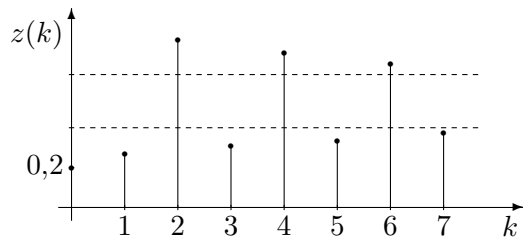
Fall II: $1 < \lambda \leq 3$



$z(k)$ strebt gegen $1 - \frac{1}{\lambda}$ für $k \rightarrow \infty$

(2. Fixpunkt)

Fall III: $3 < \lambda \leq 1 + \sqrt{6}$



$z(k)$ pendelt für $k \rightarrow \infty$ zwischen zwei Werten „Periodenverdopplung“.

Für $k \rightarrow \infty$ gilt also: $z(k+2) = z(k)$.

$$z(k) = \lambda \cdot [\lambda(z(k) - z^2(k)) - \lambda^2(z(k) - z^2(k))^2]$$

\Rightarrow 4 Lösungen: $z(k) = 0$, $z(k) = 1 - \frac{1}{\lambda}$, $z(k) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \pm \frac{1}{2\lambda} \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda - 3}$

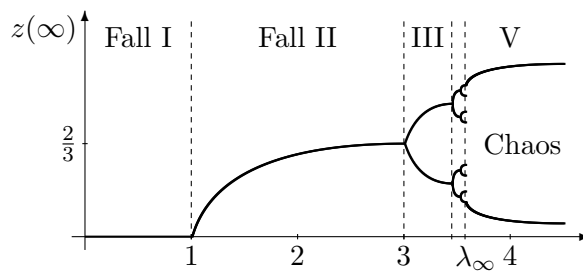
Fall IV: $1 + \sqrt{6} < \lambda \leq \lambda_\infty = 3,56995\dots$

Für $k \rightarrow \infty$ pendelt $z(k)$ zwischen 4, 8, 16, ... (mit steigendem λ) Werten.

Fall V: $\lambda > \lambda_\infty$

$z(k)$ zeigt für $k \rightarrow \infty$ „chaotisches“ Verhalten.

Zusammenfassung



7 Lineare zeitdiskrete Systeme

7.1 Signalbeschreibung im Bildbereich

7.1.1 Z-Transformation

Sei X^* die Menge aller zeitdiskreten Signale. Wir betrachten $X_c^* \leq X^*$. Es gelte $x \in X_c^*$, wenn

- a) für $k < 0$ gilt: $x(k) = 0$
- b) für $k \geq 0$ gilt: $|x(k)| < M \cdot e^{ck}$

Satz: Für jedes zeitdiskrete Signal $x \in X_c^*$ lässt sich eine Laurent-Reihe wie folgt angeben:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot z^{-k} = x(0) + \frac{x(1)}{z} + \frac{x(2)}{z^2} + \frac{x(3)}{z^3} + \dots, \quad z \in \mathbb{C}$$

Konvergenzgebiet (siehe Funktionentheorie): $\mathbb{C}_R = \{z \mid |z| > R = e^c\}$

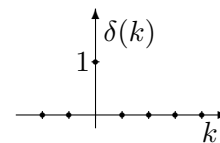
$X(z)$ stellt im Konvergenzgebiet \mathbb{C}_R eine reguläre (analytische, holomorphe) Funktion der komplexen Variablen z dar.

Beispiele

1. Impulssignal

$$x(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

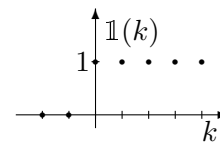
$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot z^{-k} = x(0) \cdot z^0 = 1$$



2. Sprungsignal

$$x(k) = \mathbb{1}(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

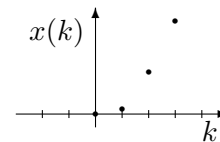
$$X(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1} \quad \text{für } |z| > 1$$



3. Beispiel

$$x(k) = a^k \cdot \mathbb{1}(k)$$

$$X(z) = 1 + \frac{a}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \frac{a^3}{z^3} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a}$$



Weitere Korrespondenzen: → Übungsheft.

Frage: Wie kann $x(k)$ aus $X(z)$ bestimmt werden?

Satz: Jedes zeitdiskrete Signal $x \in X_c^*$ lässt sich als folgendes komplexe Integral darstellen:

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{k-1} dz \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Beweis: $X(z)z^{k-1} = x(0)z^{k-1} + x(1)z^{k-2} + x(2)z^{k-3} + \dots$

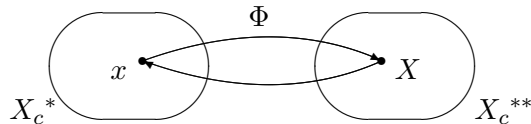
$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C [X(0)z^{k-1} + x(1)z^{k-2} + x(2)z^{k-3} + \dots \\ \dots + x(k-1)z^0 + x(k)z^{-1} + x(k+1)z^{-2} + \dots] dz$$

Aus Funktionentheorie (Cauchy-Integral-Theorem):

$$\oint \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi j & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C x(k)z^{-1} dz = \frac{1}{2\pi j} x(k) \cdot \underbrace{\oint_C \frac{1}{z} dz}_{2\pi j} = x(k)$$

Zusammenfassung



Zu jedem Signal $x \in X_c^*$ existiert eine bijektive Abbildung mit den Zuordnungen $x \rightarrow X$ bzw. $X \rightarrow x$.

Diese Abbildung heißt z -Transformation bzw. inverse z -Transformation.

Symbolik: $X(z) = \mathcal{Z}(x(k))$ oder $x(k) \circ \bullet X(z)$, $x(k) = \mathcal{Z}^{-1}(X(z))$ oder $X(z) \bullet \circ x(k)$

Transformationsgleichungen:

$$X(z) = \mathcal{Z}(x(k)) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1}(X(z)) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{k-1}$$

Terminologie:

- x Originalsignal
- X Bildsignal oder z -Transformierte von x
- X_c^* Originalbereich
- X_c^{**} Bildbereich, $X_c^{**} = \{X \mid x(z) = \mathcal{Z}(x(k)), x \in X_c^*\}$ (Menge aller z -Transformationen)

7.1.2 Rechenregeln der z -Transformation

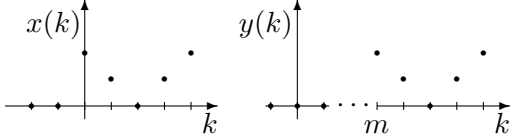
a) Linearität

$$\mathcal{Z}(\alpha x_1(k) + \beta x_2(k)) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha x_1(k) + \beta x_2(k))z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha x_1(k)z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta x_2(k)z^{-k}$$

$$= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} x_1(k)z^{-k} + \beta \sum_{k=0}^{\infty} x_2(k)z^{-k} = \alpha X_1(z) + \beta X_2(z)$$

$\rightarrow z$ -Transformation ist eine lineare Transformation

b) Verschiebungssatz 1 (Rechtsverschiebung)

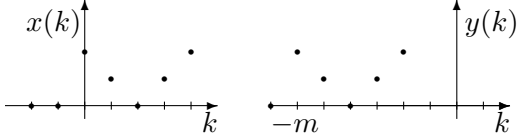
$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(y(k)) &= \mathcal{Z}(x(k-m)) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k-m)z^{-k} \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} x(k-m)z^{-k} \end{aligned}$$


Substitution: $k-m = k'$, $k = k' + m$

$$= \sum_{k'=0}^{\infty} x(k')z^{-(k'+m)} = z^{-m} \sum_{k'=0}^{\infty} x(k')z^{-k'} = z^{-m} \mathcal{Z}(x(k)) = z^{-m} X(z)$$

Vgl.: Zeitkontinuierlich: um τ nach rechts verschoben \rightarrow Multiplikation mit $e^{-j\tau}$

c) Verschiebungssatz 2 (Linksverschiebung)

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(y(k)) &= \mathcal{Z}(x(k+m)) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k+m)z^{-k} \\ &= \sum_{k'=m}^{\infty} x(k')z^{-(k'-m)} \\ &= z^m \left(\underbrace{\sum_{k'=m}^{m-1} x(k')z^{-k'} + \sum_{k'=0}^{m-1} x(k')z^{k'}}_{X(z)} - x \right) = z^m \left(X(z) - \sum_{i=0}^{m-1} x(i)z^{-i} \right) \end{aligned}$$


d) Vorwärtsdifferenz

$$\mathcal{Z}(x(k+1) - x(k)) = \sum_{k=0}^{\infty} (x(k+1) - x(k))z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k+1)z^{-k} - \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}}_{X(z)}$$

Substitution: $k' = k + 1$, $k = k' - 1$

$$= \sum_{k'=1}^{\infty} x(k')z^{-k'+1} = z(X(z) - x(0)) - X(z) = (z-1)(X(z) - zx(0))$$

e) Rückwärtsdifferenz

$$\mathcal{Z}(x(k) - x(k-1)), \quad X(z) = (1 - z^{-1})X(z)$$

Weitere Rechenregeln \rightarrow Heft S. 58

Grenzwertsätze

1. $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ (vgl. Definition der z -Transformation)
2. Falls $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = A$ existiert, gilt auch $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) = A$

7.1.3 Inverse z-Transformation

3 Methoden:

a) **Polynomdivision:** Gegeben sei $X(z)$ als rationale Funktion

$$X(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}$$

$$\begin{array}{r} (a_0 + a_1 z^{-1} + \dots) : (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots) \\ -(a_0 + \frac{a_0}{b_0} b_1 z^{-1} + \frac{a_0}{b_0} b_2 z^{-2} + \dots) \\ \hline \left(a_1 - \frac{a_0}{b_0} b_1\right) z^{-1} + \left(a_2 - \frac{a_0}{b_0} b_2\right) z^{-2} + \dots \\ -\left(\dots\right) \end{array} = \underbrace{\frac{a_0}{b_0}}_{c_0} + \underbrace{\left(\frac{a_1}{b_0} - \frac{a_0}{b_0^2} b_1\right)}_{c_1} z^{-1} + \dots$$

Mit z-Transformation: $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots$

Durch Koeffizientenvergleich: $x(k) = c_k$

Beispiel: $X(z) = \frac{z+3}{z^2-4} = \frac{z^{-1}+3z^{-2}}{1-4z^{-2}} \Rightarrow (z^{-1}+3z^{-2}) : (1-4z^{-2}) = z^{-1}+3z^{-2}+4z^{-3}$
 $\Rightarrow x(0) = 0, x(1) = 1, x(2) = 3, x(3) = 4, \dots$

b) **Rekursionsformel:** Es sei $b_0 = 1$. Dann gilt die Rekursionsformel

$$x(k) = c_k = a_k - \sum_{i=1}^k b_i \cdot c_{k-i}$$

Beispiel: $X(z) = \frac{z^{-1}+3z^{-2}}{1-4z^{-2}}$

$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_i = 0 \quad (i > 2), \quad b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = -4, b_j = 0 \quad (j > 2)$

$$\begin{array}{r} x(0) = c_0 = a_0 = 0 \\ x(1) = c_1 = a_1 - b_1 \cdot c_0 = 1 \\ x(2) = c_2 = a_2 - b_1 \cdot c_1 - b_2 \cdot c_0 = 3 \\ \dots \end{array}$$

7.1.4 c) Residuenmethode

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) \cdot z^{-k} dz = \sum_{z=z_i} \text{Res} [X(z) \cdot z^{k-1}]$$

$z_i \dots$ singuläre Stellen von $X(z) \cdot z^{k-1}$

Falls z_i ein m -facher Pol ist:

$$\text{Res}_{z=z_i} [X(z) \cdot z^{k-1}] = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}} [X(z) \cdot z^{k-1} \cdot (z - z_i)^m]$$

Falls z_i ein einfacher Pol ist ($m = 1$):

$$\operatorname{Res}_{z=z_i} [X(z) \cdot z^{k-1}] = \lim_{z \rightarrow z_i} [X(z) \cdot z^{k-1} \cdot (z - z_i)]$$

Beispiel: $X(z) = \frac{z+3}{z^2-4} = \frac{z+3}{(z+2)(z-2)}$

$$x(k) = \sum \operatorname{Res} [X(z) \cdot z^{k-1}] = \sum \operatorname{Res} \left[\frac{(z+3)z^{k-1}}{(z+2)(z-2)} \right]$$

NB: z^{k-1} liefert zusätzliche Polstelle für den Fall $k = 0$.

Fall $k = 0$: $x(0) = \sum_{\substack{z=\pm 2 \\ z=0}} \operatorname{Res} \frac{z+3}{(z+2)(z-2)z} = \frac{5}{8} + \frac{1}{8} - \frac{3}{4} = 0$

Eventuell einfacher mit Grenzwertsatz: $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z+3}{z^2-4} = 0$

Fall $k = 1, 2, \dots$:

$$x(k) = \sum_{\substack{z=\pm 2 \\ z=0}} \operatorname{Res} \frac{(z+3)z^{k-1}}{(z+2)(z-2)} = \frac{5}{4}2^{k-1} - \frac{1}{4}(-2)^{k-1}$$

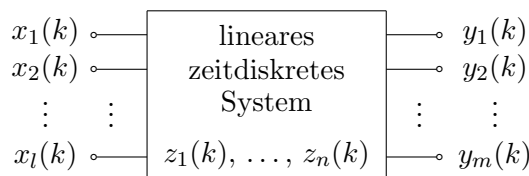
Zusammenfassung:

$$x(k) = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ \frac{5}{4}2^{k-1} - \frac{1}{4}(-2)^{k-1} & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Vorteil: Geschlossene Lösung.

7.2 Systembeschreibung im Zeitbereich

7.2.1 Zustandsgleichungen



$$\begin{aligned} z_1(k+1) &= f_1[z_1(k), \dots, z_n(k), x_1(k), \dots, x_l(k)] \\ &= a_{11}z_1(k) + \dots + a_{1n}z_n(k) + b_{11}x_1(k) + \dots + b_{1l}x_l(k) \end{aligned}$$

\vdots

$$\begin{aligned} z_n(k+1) &= f_n[z_1(k), \dots, z_n(k), x_1(k), \dots, x_l(k)] \\ &= a_{n1}z_1(k) + \dots + a_{nn}z_n(k) + b_{n1}x_1(k) + \dots + b_{nl}x_l(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1(k) &= g_1[z_1(k), \dots, z_n(k), x_1(k), \dots, x_l(k)] \\ &= c_{11}z_1(k) + \dots + c_{1n}z_n(k) + d_{11}x_1(k) + \dots + d_{1l}x_l(k) \end{aligned}$$

\vdots

$$\begin{aligned} y_m(k) &= g_m[z_1(k), \dots, z_n(k), x_1(k), \dots, x_l(k)] \\ &= c_{m1}z_1(k) + \dots + c_{mn}z_n(k) + d_{m1}x_1(k) + \dots + d_{ml}x_l(k) \end{aligned}$$

In Matrizenform

$$z(k) = \begin{pmatrix} z_1(k) \\ \vdots \\ z_n(k) \end{pmatrix}, \quad x(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_l(k) \end{pmatrix}, \quad y(k) = \begin{pmatrix} y_1(k) \\ \vdots \\ y_m(k) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

$\begin{aligned} z(k+1) &= A \cdot z(k) + B \cdot x(k) \\ y(k) &= C \cdot z(k) + D \cdot x(k) \end{aligned}$	Zustandsgleichungen des linearen zeitdiskreten Systems
--	--

7.2.2 Differenzgleichung und Realisierung

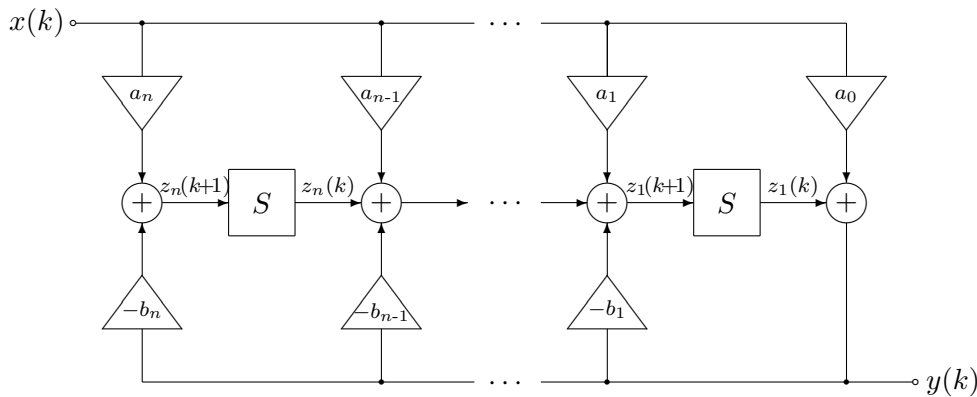
Im Weiteren gelte $l = m = 1$ (aber nach wie vor n Speicher).

Satz: Ein lineares zeitdiskretes dynamisches System (mit $l = m = 1$) lässt sich durch eine *Differenzgleichung* folgenden Typs beschreiben ($a_i, b_i \in \mathbb{R}, b_0 = 1$):

$$\begin{aligned} y(k+n) + b_1 y(k+n-1) + b_2 y(k+n-2) + \cdots + b_{n-1} y(k+1) + b_n y(k) \\ = a_0 x(k+n) + a_1 x(k+n-1) + \cdots + a_{n-1} x(k+1) + a_n x(k) \end{aligned}$$

Beweisskizze:

Ansatz (Systemrealisierung) $\begin{cases} \text{Differenzgleichung} \\ \text{Zustandsgleichungen} \end{cases}$



$$z_1(k+1) = z_2(k) + a_1 \cdot x(k) - b_1 \cdot y(k) \tag{1}$$

$$z_2(k+1) = z_3(k) + a_2 \cdot x(k) - b_2 \cdot y(k) \tag{2}$$

\vdots

$$z_{n-1}(k+1) = z_n(k) + a_{n-1} \cdot x(k) - b_{n-1} \cdot y(k) \tag{n-1}$$

$$z_n(k+1) = a_n \cdot x(k) - b_n \cdot y(k) \tag{n}$$

$$y(k) = z_1(k) + a_0 \cdot x(k) \tag{n+1}$$

I. Überführung des Ansatzes in die Differenzengleichung. Elimination von z_1, \dots, z_n wie folgt:

- in Gleichung $(n+1)$ wird k durch $k+1$ substituiert und Gleichung (1) eingesetzt

$$y(k+1) = z_2(k) + a_1 \cdot x(k) - b_1 \cdot y(k) + a_0 \cdot x(k+1) \quad (n+2)$$

- in Gleichung $(n+2)$ wird k durch $k+1$ ersetzt und Gleichung (2) eingesetzt

- nach n Schritten sind alle z_i substituiert \rightarrow Differenzengleichung

II. Überführung des Ansatzes in die Zustandsgleichungen: Einsetzen von Gleichung $(n+1)$ in die Gleichungen (1), (2), \dots , (n) : Überführungsgleichung:

$$\begin{pmatrix} z_1(k+1) \\ z_2(k+1) \\ \vdots \\ z_{n-1}(k+1) \\ z_n(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -b_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \\ \vdots \\ z_{n-1}(k) \\ z_n(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \cdot a_0 \\ a_2 - b_2 \cdot a_0 \\ \vdots \\ a_n - 1 - b_{n-1} \cdot a_0 \\ a_n - b_n \cdot a_0 \end{pmatrix} x(k)$$

$$y(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \\ \vdots \\ z_n(k) \end{pmatrix} + (a_0) x(k) \quad \text{Ergebnisgleichung}$$

7.3 Systembeschreibung im Bildbereich

7.3.1 Lösung der Zustandsgleichungen

Aus 7.2.1. (mit $X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\}$, $Y(z) = \mathcal{Z}\{y(k)\}$, $Z(z) = \mathcal{Z}\{z(k)\}$):

$$\begin{aligned} z(k+1) &= A \cdot z(k) + B \cdot x(k) \\ y(k) &= C \cdot z(k) + D \cdot x(k) \end{aligned}$$

z-Transformation der 1. Gleichung: (mit Regel 3, Verschiebungssatz)

$$\begin{aligned} z \cdot Z(z) - z \cdot z(0) &= A \cdot Z(z) + B \cdot X(z) \\ (zE - A) \cdot Z(z) &= z \cdot z(0) + B \cdot X(z) \\ Z(z) &= \underbrace{(zE - A)^{-1}}_{\Phi(z)} \cdot z(0) + (zE - A)^{-1} \cdot B \cdot X(z) \end{aligned}$$

$\Phi(z)$... Fundamentalmatrix im Bildbereich

z-Transformation der 2. Gleichung:

$$\begin{aligned} Y(z) &= C \cdot Z(z) + D \cdot X(z) \\ &= C \cdot \Phi(z) \cdot z(0) + \underbrace{[C \cdot (zE - A)^{-1} \cdot B + D]}_{G(z)} \cdot X(z) \end{aligned}$$

$G(z)$... Übertragungsfunktion im Bildbereich

$Y(z) = C \cdot \Phi(z) \cdot z(0) + G(z) \cdot X(z)$	Input-Output Gleichung im Bildbereich
---	---------------------------------------

Inverse z-Transformation: (Regel 6, Faltungssatz)

$$y(k) = \underbrace{C \cdot \varphi(k) \cdot z(0)}_{\text{freie Ausgabe}} + \underbrace{\sum_{i=0}^k g(k-i) \cdot x(i)}_{\text{erzwungene Ausgabe}}$$

Input-Output Gleichung im Zeitbereich

Anmerkungen

1. $\varphi(k)$ heißt *Fundamentalmatrix* im Zeitbereich. Es gilt: $\varphi(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{\Phi(z)\} = A^k$

Beweis: Es ist zu zeigen, daß $\mathcal{Z}\{A^k\} = (zE - A)^{-1}z$:

$$\varphi(k) = A^k$$

$$\varphi(k+1) = A^{k+1} = A \cdot A^k = A \cdot \varphi(k)$$

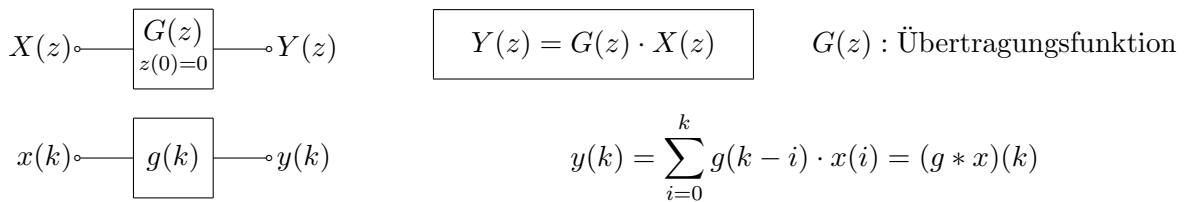
$$\mathcal{Z}: z \cdot \Phi(z) - z \cdot \varphi(0) = A \cdot \Phi(z) \quad \text{mit } \varphi(0) = A^0 = E$$

$$(zE - A)\Phi(z) = z \cdot E \Leftrightarrow \Phi(z) = (zE - A)^{-1} \cdot z \cdot E$$

2. $g(k)$ heißt *Übertragungsmatrix* im Zeitbereich oder *Gewichtsmatrix*.

$$g(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\} = \begin{cases} D & k = 0 \\ CA^{k-1}B & k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

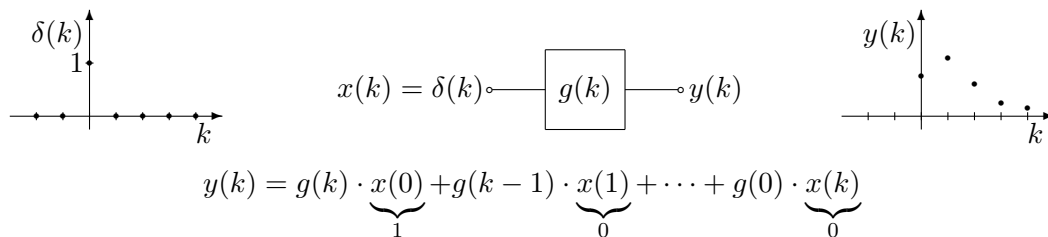
Sonderfall für $l = m = 1$, $z(0) = 0$: (System mit einem Ein- und Ausgang im Nullzustand)



$$y(k) = g(k) \cdot x(0) + g(k-1) \cdot x(1) + \dots + g(0) \cdot x(k)$$

$g(n) \dots$ „Gewichte“ für Eingangssignal $\Rightarrow g(k)$ heißt (diskrete) Gewichtsfunktion des Systems

Veranschaulichung



$\Rightarrow y(k) = g(k)$, deshalb heißt die Gewichtsfunktion auch *Impulsantwort* (Reaktion des Systems auf das Impulssignal δ).

7.3.2 Übertragungsfunktion ($l = m = 1$)

Wie kann $G(z)$ berechnet werden?

a) aus den Zustandsgleichungen: $G(z) = C(zE - A)^{-1} \cdot B \cdot D$

b) aus Eingabe $X(z)$ und Ausgabe $Y(z)$: $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

c) aus der Differenzgleichung (nach 7.2.2)

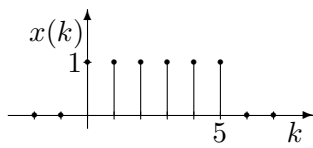
$$y(k+m) + b_1 \cdot y(k+m-1) + \dots + b_{m-1} \cdot y(k+1) + b_m \cdot y(k) = a_0 \cdot x(k+n) + a_1 \cdot x(k+n-1) + \dots + a_{n-1} \cdot x(k+1) + a_n \cdot x(k)$$

Im Weiteren sei $n = m$. Nach z -Transformation folgt unter Beachtung der Voraussetzung $z(0) = 0$ (System im Nullzustand) der Zusammenhang:

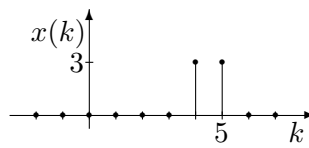
$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_n \cdot z^{-n} + a_{n-1} \cdot z^{-(n-1)} + \dots + a_1 \cdot z^{-1} + a_0}{b_n \cdot z^{-n} + b_{n-1} \cdot z^{-(n-1)} + \dots + b_1 \cdot z^{-1} + 1}$$

Beispiel: Impulskompression

gegeben:



gewünscht:



gesucht:

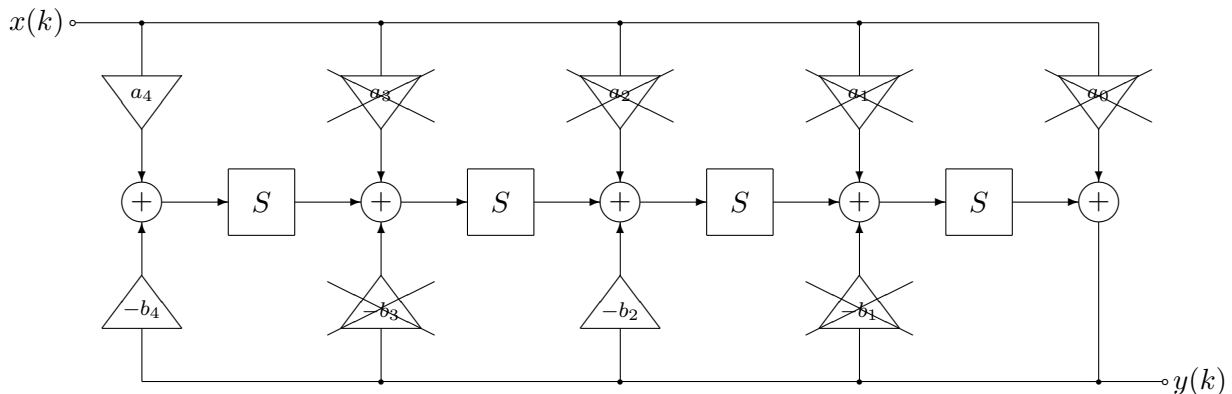
Schaltung,

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

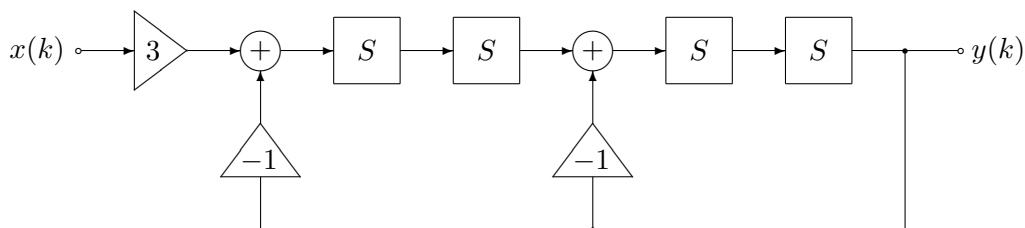
$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot z^{-k} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^5}, \quad Y(z) = \frac{3}{z^4} + \frac{3}{z^5}$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3z^{-4} + 3z^{-5}}{1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5}} = \frac{3z^{-4}}{z^{-4} + z^{-2} + 1}$$

$\Rightarrow a_4 = 3, b_4 = 1, b_2 = 1, b_0 = 1$, die restlichen Glieder fallen heraus:



Vereinfacht:



Beachte:

1. Die Realisierung eines linearen zeitdiskreten Systems wird vollständig durch die Koeffizienten a_i, b_i beschrieben
2. Entwurf eines zeitdiskreten Systems bedeutet Bestimmung dieser Koeffizienten (Digitalfilterentwurf)
3. Realisierung als Schaltung oder Algorithmus (Regelfall)

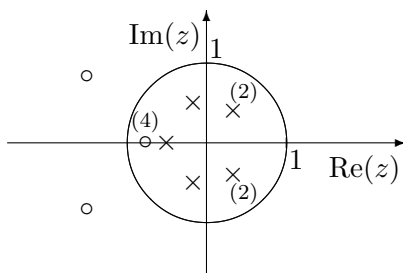
Darstellung von $G(z)$: (Pol-Nullstellen-Plan)

$$G(z) = \frac{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + \dots + a_1 z^{-1} + a_0}{b_n z^{-n} + b_{n-1} z^{-n+1} + \dots + b_1 z^{-1} + 1} = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}{z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n}$$

$$= a_0 \frac{(z - z'_1)(z - z'_2) \dots (z - z'_n)}{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)}$$

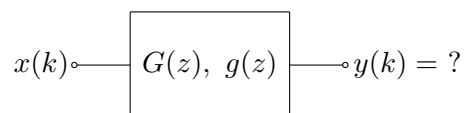
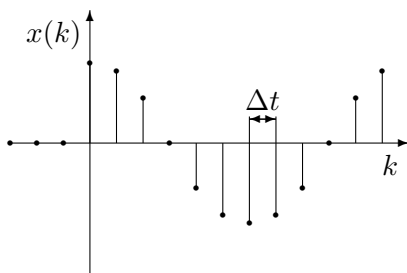
- Pole und Nullstellen entweder auf reeller Achse oder in konjugiert komplexen Paaren
- Pole und Nullstellen können auch mehrfach sein

Beispiel



Wichtige Systemeigenschaften sind aus dem PN-Plan ablesbar (z.B. Stabilität).

7.3.3 Flüchtiger und stationärer Vorgang



Vorbetrachtung:

zeitkontinuierliches Signal: $x(t) = \hat{X} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

Abtastfrequenz: $f_A = \frac{1}{\Delta t}; \omega_A = \frac{2\pi}{\Delta t}$

Abtastzeitpunkte: $t_k = k\Delta t = \frac{k}{f_A}, (k = 0, 1, 2, \dots)$

Abtastwerte: $x(t_k) = \hat{X} \cdot \cos(\omega t_k + \varphi_k) = \hat{X} \cdot \cos(\omega \frac{k}{f_A} + \varphi_k)$
 $= \hat{X} \cdot \cos(\Omega k + \varphi_k) = x(k)$

$\Omega = \frac{\omega}{f_A} = \frac{2\pi f}{f_A} \dots$ Normierte Kreisfrequenz

Das Abtasttheorem verlangt $f_A > 2f$, d.h. $\boxed{0 \leq \Omega \leq \pi}$

Lösung

$$\begin{aligned} x(k) &= \widehat{X} \cdot \cos(\Omega k + \varphi_x) \cdot \mathbb{1}(k) \\ &= \frac{1}{2} \widehat{X} \left(e^{j\Omega k} \cdot e^{j\varphi_x} + e^{-j\Omega k} \cdot e^{-j\varphi_x} \right) \cdot \mathbb{1}(k) \quad \left(\text{komplexe Amplituden: } \underline{X} = \widehat{X} \cdot e^{j\varphi_x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\underline{X} \cdot e^{j\Omega k} + \underline{X}^* \cdot e^{-j\Omega k} \right) \cdot \mathbb{1}(k) \end{aligned}$$

z -Transformation lt. Korrespondenztabelle (Zeile 10):

$$X(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\underline{X}z}{z - e^{j\Omega}} + \frac{\underline{X}^*z}{z - e^{-j\Omega}} \right)$$

$Y(z) = G(z) \cdot X(z)$ inverse z -Transformation:

$$\begin{aligned} y(k) &= \sum \text{Res} \left[Y(z)z^{k-1} \right] = \sum \text{Res} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\underline{X}}{z - e^{j\Omega}} + \frac{\underline{X}^*}{z - e^{-j\Omega}} \right) \cdot G(z) \cdot z^k \right] \\ &= \underbrace{\sum_{\substack{\text{Pole } z_i \\ \text{von } G(z)}} \text{Res} [\dots]}_{\substack{\text{Flüchtiger Vorgang} \\ y_{fl}(k)}} + \underbrace{\sum_{z=e^{\pm j\Omega}} \text{Res} [\dots]}_{\substack{\text{Stationärer Vorgang} \\ y_{st}(k)}} \end{aligned}$$

Für den **flüchtigen Vorgang** $y_{fl}(k)$ gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{fl}(k) = 0, \quad \text{wenn alle } |z_i| < 1 \quad (\text{stabiles System, vgl. 7.4.1})$$

Für den **stationären Vorgang** $y_{st}(k)$ gilt:

$$\begin{aligned} y_{st}(k) &= \sum_{z=e^{\pm j\Omega}} \text{Res} \frac{1}{2} \left(\frac{\underline{X}}{z - e^{j\Omega}} + \frac{\underline{X}^*}{z - e^{-j\Omega}} \right) \cdot G(z) \cdot z^k \\ &= \frac{1}{2} \left(\underline{X}G(e^{j\Omega})e^{j\Omega k} + \underline{X}^*G(e^{-j\Omega})e^{-\Omega k} \right) \\ &= \text{Re} \left\{ \widehat{X}e^{j\varphi_x} |G(e^{j\Omega})| \cdot e^{j \arg(G(e^{j\Omega}))} \cdot e^{j\Omega k} \right\} \\ &= \underbrace{\widehat{X} |G(e^{j\Omega})|}_{\widehat{Y}} \cdot \cos \left(\Omega k + \underbrace{\varphi_x + \arg G(e^{j\Omega})}_{\varphi_y} \right) \end{aligned}$$

Damit gilt nach hinreichend langer Zeit:

$$\boxed{y(k) = \widehat{Y} \cdot \cos(\Omega k + \varphi_y)} \quad \text{mit } \widehat{Y} = \widehat{X} \cdot |G(e^{j\Omega})| \text{ und } \varphi_y = \varphi_x + \arg G(e^{j\Omega})$$

7.3.4 Frequenzcharakteristiken

Ω sei nun variabel ($0 \leq \Omega \leq \pi$).

Definitionen

1. $G(e^{j\Omega})$: Frequenzgang des linearen zeitdiskreten Systems (Darstellung in der komplexen Ebene heißt Ortskurve).

2. Amplitudenfrequenzgang: $|G(e^{j\Omega})| = A(\Omega) = \frac{\widehat{Y}}{\widehat{X}} = \sqrt{G(z) \cdot G(z^{-1})} \Big|_{z=e^{j\Omega}}$

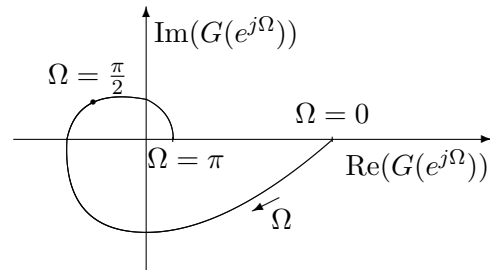
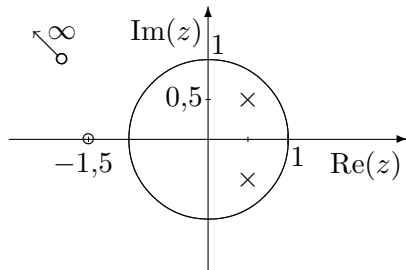
3. Phasenfrequenzgang: $\varphi(\Omega) = \varphi_y - \varphi_x = \arg G(e^{j\Omega})$

4. $a(\Omega) = -\ln A(\Omega)$ Dämpfungsmaß in Np
 $a(\Omega) = -20 \log A(\Omega)$ Dämpfungsmaß in dB
 $b(\Omega) = -\varphi(\Omega)$ Phasenmaß

Beispiel: PN-Plan, Ortskurve

$$G(z) = \frac{z + 1,5}{z^2 - z + 0,5} = \frac{z + 1,5}{(z - 0,5(1 + j))(z - 0,5(1 - j))}$$

$$G(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j\Omega} + 1,5}{e^{2j\Omega} - e^{j\Omega} + 0,5} = \frac{(\cos \Omega + 1,5) + j \sin \Omega}{(\cos 2\Omega - \cos \Omega + 0,5) + j(\sin 2\Omega - \sin \Omega)}$$

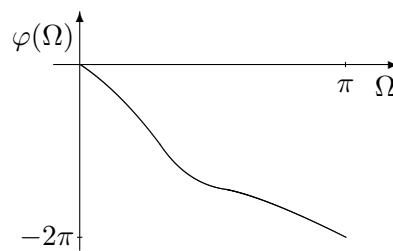
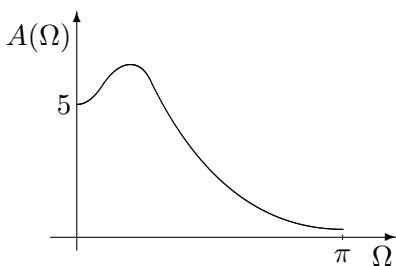


Amplitudenfrequenzgang:

$$A(\Omega) = |G(e^{j\Omega})| = \sqrt{G(z) \cdot G(z^{-1})} \Big|_{z=e^{j\Omega}} = \sqrt{\frac{z + 1,5}{z^2 - z + 0,5} \cdot \frac{z^{-1} + 1,5}{z^{-2} - z^{-1} + 0,5}} \Big|_{z=e^{j\Omega}}$$

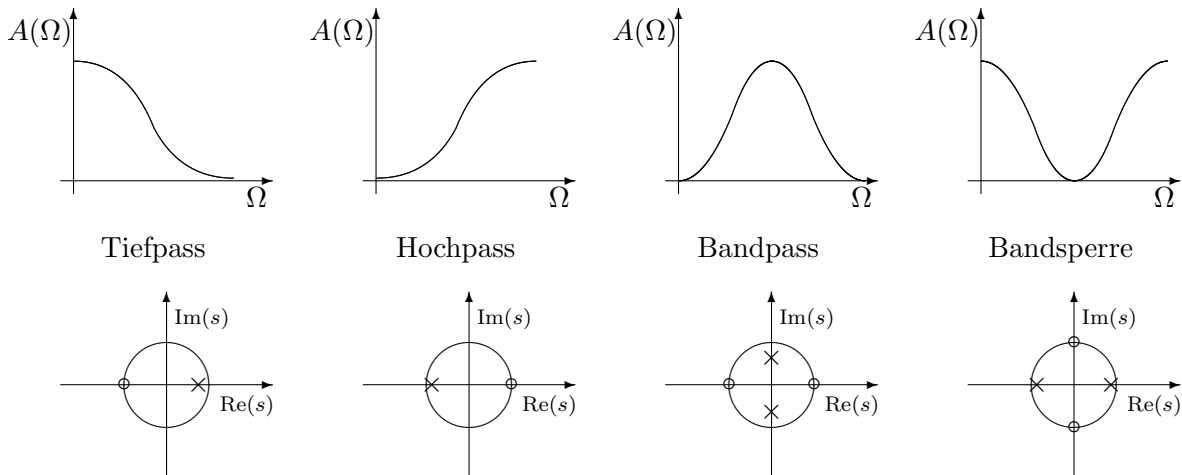
$$= \sqrt{\frac{3,25 + 1,5 \cdot (z + z^{-1})}{2,25 - 1,5(z + z^{-1}) + 0,5 \cdot (z^2 + z^{-2})}} \Big|_{z=e^{j\Omega}} = \sqrt{\frac{3,25 + 3 \cdot \cos \Omega}{2,25 - 3 \cdot \cos \Omega + \cos 2\Omega}}$$

Phasenfrequenzgang: $\varphi(\Omega) = \arg G(e^{j\Omega})$



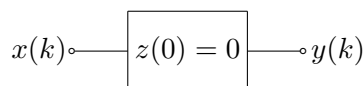
Abschätzung des Amplitudenfrequenzgangs mit der „Zeltstangenmethode, entlang des Einheitskreises auf dem PN-Plan.

Einteilung nach $A(\Omega)$:



7.4 Systemeigenschaften und Klassifizierung

7.4.1 Stabilität



Dieses zeitdiskrete System heißt stabil (genau: BIBO-Stabil) wenn gilt:

$$|x(k)| \leq K_1 \Rightarrow |y(k)| \leq K_2$$

K_1, K_2 endliche positive Konstanten ($k = 0, 1, \dots$)

aus 7.3.1:
$$y(k) = \sum_{i=0}^k g(k-i)x(i) = \sum_{i=0}^k g(i)x(k-i)$$

Abschätzung:

$$|y(k)| = \left| \sum_{i=0}^k g(i)x(k-i) \right| \leq \sum_{i=0}^k |g(i)| \underbrace{|x(k-i)|}_{\leq K_1} \leq K_1 \sum_{i=0}^k |g(i)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |g(i)| \leq k < \infty$$

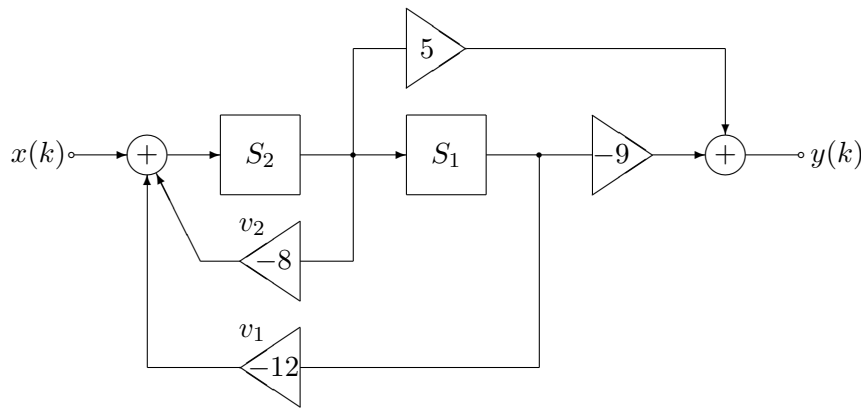
$$\begin{aligned} g(k) &= \mathcal{Z}^{-1}(G(z)) = \sum \text{Res}[G(z) \cdot z^{k-1}] = \sum_{\substack{z=0 \\ z=z_\nu}} \text{Res} \left[\frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n} z^{k-1} \right] \\ &= \underbrace{C_0 \cdot z^0}_{< \infty} + \underbrace{\sum_{\nu} C_\nu z_\nu^k}_{< \infty \text{ für } |z_\nu| < 1} \end{aligned}$$

Daraus folgt: Das System ist stabil, falls für **alle** Pole z_ν von $G(z)$ gilt:

$$|z_\nu| < 1$$

Das System ist instabil, falls für wenigstens einen Pol von $G(z)$ gilt: $|z_\nu| > 1$.

Beispiel:



Übertragungsfunktion: $G(z) = \frac{5z - 9}{z^2 + 8z + 12}$

Pole: $z_1 = -2, z_2 = -6 \Rightarrow$ System ist instabil, da $|z_1| = 2 > 1, |z_2| = 2 > 1$

$$g(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\} = \sum_{\substack{z=-2 \\ z=-6 \\ z=0}} \left[\frac{5z - 9}{(z + 2)(z + 6)} z^{k-1} \right]$$

k = 0: $g(0) = 0$

k > 0: $g(k) = \frac{39}{4}(-6)^{k-1} - \frac{19}{4}(-2)^{k-1}$

Mit $v_1 = -0,12, v_2 = -0,8 \Rightarrow G(z) = \frac{5z - 9}{z^2 + 0,8z + 0,12} = \frac{5z - 9}{(z + 0,2)(z + 0,6)}$

\leadsto Pole: $z_1 = -0,2, z_2 = -0,6 \Rightarrow$ Das System ist stabil, da $|z_1| = 0,2 < 1, |z_2| = 0,6 < 1$.

$$g(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\} = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ 30(-0,6)^{k-1} - 25(-0,2)^{k-1} & k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |g(k)| < K < \infty$$

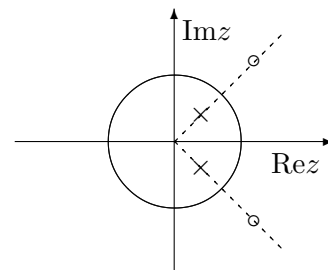
7.5 Allpass und Mindestphasensystem

Definition 1: Ein zeitdiskretes System, für welches gilt $|G(e^{j\Omega})| = \text{konst.}$, ($\Omega \in \mathbb{R}$) heißt *Allpass* (AP).

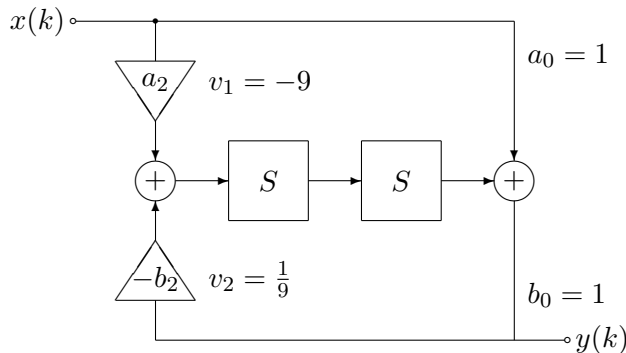
Allgemeine Form von $G(z)$:

$$G(z) = a_0 \cdot \frac{\dots (z - z_i^{-1}) \dots (z - z_j^{-1})(z - \bar{z}_j^{-1}) \dots}{\dots (z - z_i) \dots (z - z_j)(z - \bar{z}_j) \dots}$$

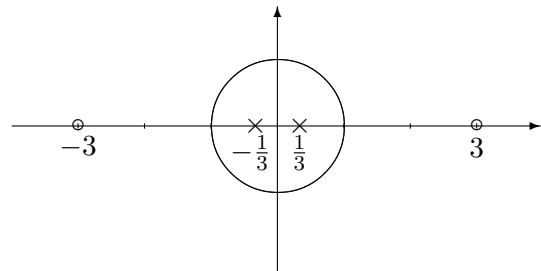
Eigenschaft des PN-Planes: Pole und Nullstellen liegen spiegelbildlich zu $|z| = 1$, und zwar Pole innerhalb des Einheitskreises $|z| = 1$, Nullstellen außerhalb.



Beispiel: $G(z) = \frac{-9z^{-2} + 1}{-\frac{1}{9}z^{-2} + 1} = \frac{(z+3)(z-3)}{(z+\frac{1}{3})(z-\frac{1}{3})}$



PN-Plan → Allpass

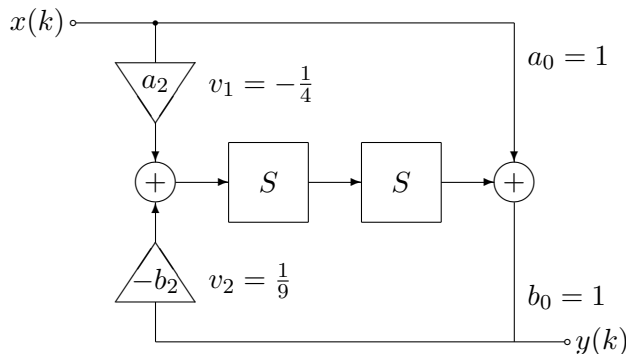


$$A(\Omega) = |G(e^{j\Omega})| = \sqrt{G(z) \cdot G(z^{-1})} \Big|_{z=e^{j\Omega}} = \sqrt{\frac{(z^2 - 9)(z^{-2} - 9)}{(z^2 - \frac{1}{9})(z^{-2} - \frac{1}{9})}} \Big|_{z=e^{j\Omega}}$$

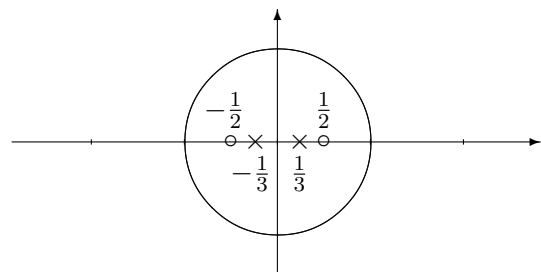
$$= \sqrt{\frac{82 - 9(z^2 + z^{-2})}{\frac{82}{81} - \frac{1}{9}(z^2 + z^{-2})}} \Big|_{z=e^{j\Omega}} = 9 = \text{konstant}$$

Definition 2: Ein stabiles System, dessen Übertragungsfunktion G keine Nullstellen z_i mit $|z_i| > 1$ hat, heißt *Mindestphasensystem*.

Beispiel: $G(z) = \frac{z^2 - \frac{1}{4}}{z^2 - \frac{1}{9}} = \frac{(z + \frac{1}{2})(z - \frac{1}{2})}{(z + \frac{1}{3})(z - \frac{1}{3})}$

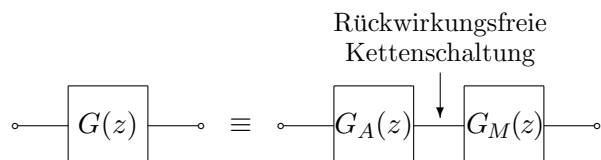


PN-Plan → Mindestphasensystem



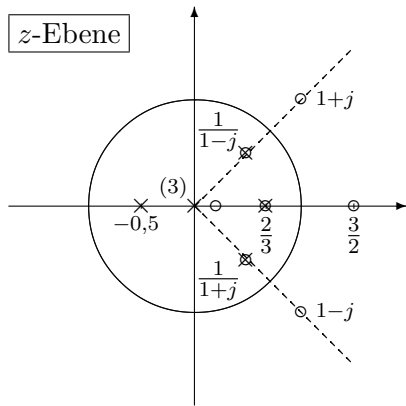
Satz: Die Übertragungsfunktion eines beliebigen zeitdiskreten Systems läßt sich wie folgt darstellen

$$G(z) = G_A(z) \cdot G_M(z)$$



$G_A(z)$: Übertragungsfunktion Allpass, $G_M(z)$: Übertragungsfunktion Mindestphasensystem

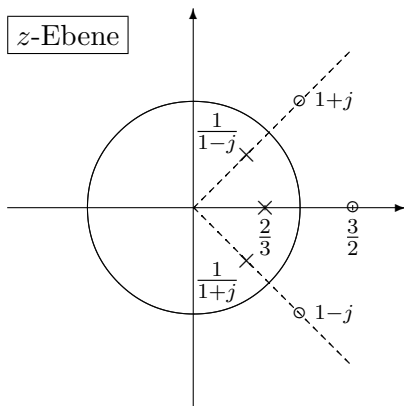
Beispiel: $G(z) = \frac{(z - 0,2)(z - 1,5)(z^2 - 2z + 2)}{z^3(z + 0,5)} = \frac{(z - 0,2)(z - 1,5)(z - (1 + j))(z - (1 - j))}{z^3(z + 0,5)}$



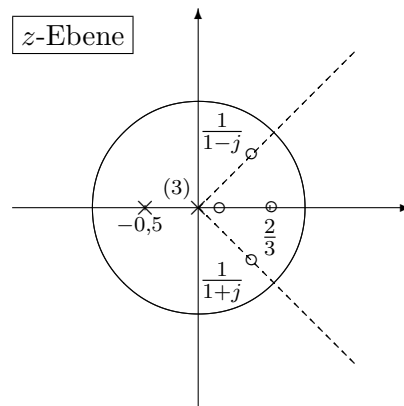
Bedingungen für Allpass und Mindestphasensystem durch Hinzufügen von kombinierten Pol- und Nullstellen (⊗) schaffen:

- $|1 + j| > 1 \rightarrow \frac{1}{1+j}$ Pol-Nullstelle hinzufügen
- $|1 - j| > 1 \rightarrow \frac{1}{1-j}$ Pol-Nullstelle hinzufügen
- $|1,5| > 1 \rightarrow \frac{2}{3}$ Pol-Nullstelle hinzufügen

Allpass



Mindestphasensystem



$$G_A(z) = \frac{(z - 1,5)(z - (1 + j))(z - (1 - j))}{(z - \frac{2}{3})(z - \frac{1}{1+j})(z - \frac{1}{1-j})}$$

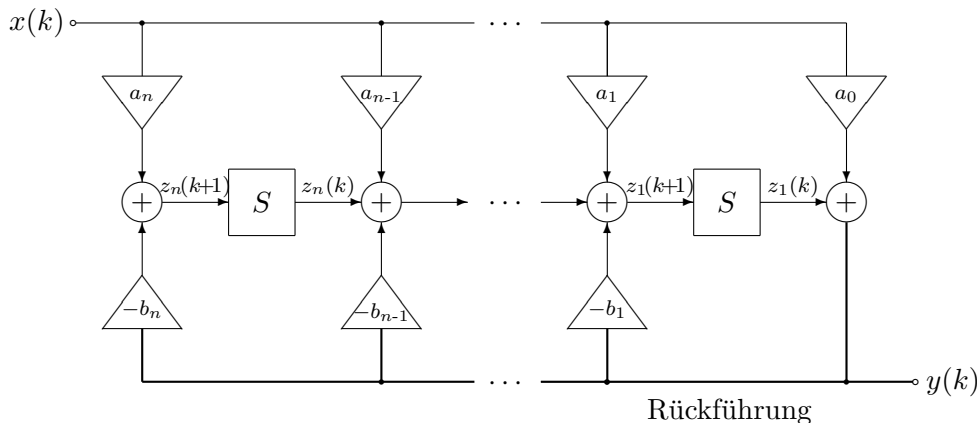
$$= \frac{(z - 1,5)(z^2 - 2z + 2)}{(z - \frac{2}{3})(z^2 - z + \frac{1}{2})}$$

$$G_M(z) = \frac{(z - 0,2)(z - \frac{2}{3})(z - \frac{1}{1+j})(z - \frac{1}{1-j})}{z^3(z + 0,5)}$$

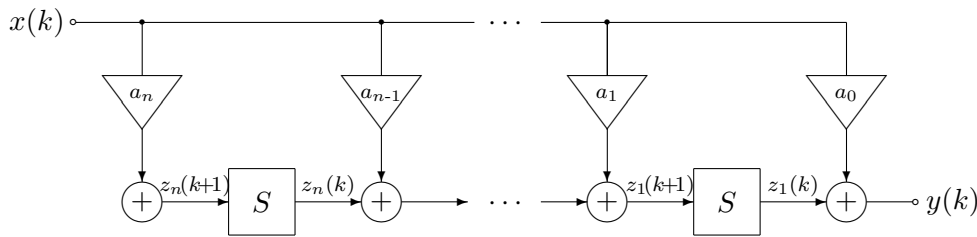
$$= \frac{(z - 0,2)(z - \frac{2}{3})(z^2 - z + \frac{1}{2})}{z^3(z + 0,5)}$$

7.5.1 Rekursion und nicht-rekursive Systeme

aus 7.2.2.: Kanonische Realisierung zeitdiskreter Systeme. Rekursives System (allgemeiner Fall)



Sonderfall: $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0 \Rightarrow$ Nichtrekursives System



Hier gilt:

$$y(k) = a_0 \cdot x(k) + a_1 x(k-1) + \dots + a_n x(k-n)$$

$$\Rightarrow y(z) = a_0 X(z) + a_1 z^{-1} X(z) + \dots + a_n z^{-n} X(z) = (a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}) \cdot X(z)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{z^n}$$

Der PN-Plan hat eine n -fache Nullstelle bei $z = 0$.

Eigenschaften:

- Nichtrekursive Systeme sind stets stabil
- Die Impulsantwort lautet $g = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$
 - \rightarrow Die Impulsantwort ist endlich (FIR-Filter, **F**inite **I**mpulse **R**esponse)
 - \rightarrow Die Werte der diskreten Impulsantwort entsprechen den Filterkoeffizienten

7.5.2 Linearphasige Systeme

Ein nichtrekursives System, bei dem die Nullstellen von $G(z)$ spiegelbildlich zum Einheitskreis liegen, ist ein *linearphasiges System*.

Eigenschaften

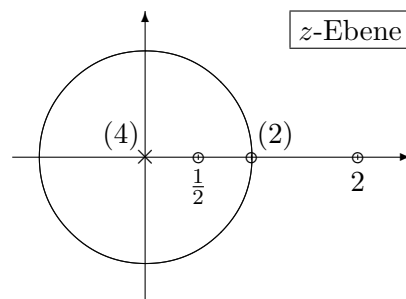
- Phasenmaß $b(\Omega)$ hängt linear von Ω ab
- Gruppenlaufzeit $T_{gr} = \frac{db(\Omega)}{d\Omega}$ ist konstant

Beispiel:

$$G(z) = \frac{(z-1)^2(z-\frac{1}{2})(z-2)}{z^4}$$

$$= \frac{z^4 - 4,5z^3 + 7z^2 - 4,5z + 1}{z^4}$$

$$= \frac{1}{z^2} \cdot (z^2 - 4,5z + 7 - 4,5z^{-1} + z^{-2})$$



$$G(e^{j\Omega}) = e^{-2j\Omega} (e^{2j\Omega} - 4,5e^{j\Omega} + 7 - 4,5e^{-j\Omega} + e^{-2j\Omega})$$

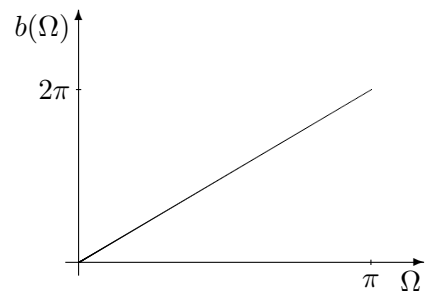
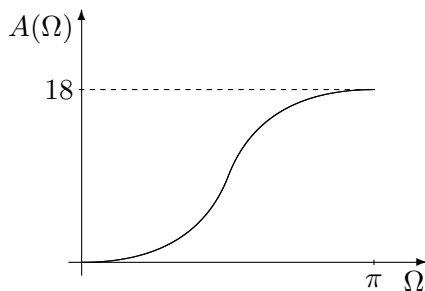
$$= e^{-2j\Omega} (7 - 9 \cos \Omega + 2 \cdot \cos 2\Omega)$$

Amplitudenfrequenzgang:

$$A(\Omega) = |G(e^{j\Omega})| = \underbrace{|e^{-2j\Omega}|}_1 \cdot \underbrace{|7 - 9 \cos \Omega + 2 \cdot \cos 2\Omega|}_{\geq 1} = 7 - 9 \cos \Omega + 2 \cos 2\Omega$$

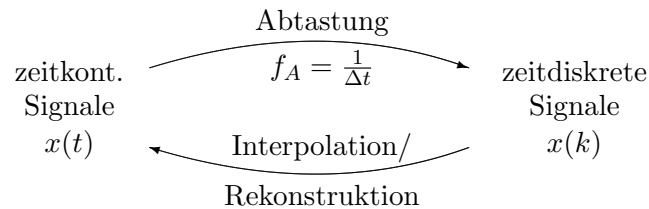
Phasenmaß:

$$b(\Omega) = -\arg G(e^{j\Omega}) = -\arg(e^{-2j\Omega}) - \underbrace{\arg(7 - 9 \cos \Omega + 2 \cdot \cos 2\Omega)}_0 = 2\Omega$$



7.6 Zusammenhänge zwischen zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten Systemen

7.6.1 Zeitbereich



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \text{si} \frac{\pi}{\Delta t} (t - k\Delta t) \quad \text{Sampling-Reihe}$$

Das interpolierte Signal hat eine Grenzfrequenz von $\omega_g = \frac{\pi}{\Delta t}$. Wegen $\omega_A = \frac{2\pi}{\Delta t}$ gilt: $\omega_g = \frac{\omega_A}{2}$ oder $\omega_g \cdot \Delta t = \Omega_g = \pi$.

Umkehrung: Bei gegebenem ω_g ist die Abtastfrequenz $\omega_A \geq 2\omega_g$ zu wählen (*Abtastbedingung*). [siehe auch 7.3.3]

7.6.2 Bildbereich (lineare Systeme)

... ist wohl nicht prüfungsrelevant und kommt daher auch nicht vor den Semesterferien.