Systemtheorie III – WS 05/06
Prof. Dr.-Ing. habil. Hoffmann, TU Dresden
Mitschrift

Fabian Kurz
http://fkurz.net/

Zuletzt aktualisiert:
15. Januar 2006

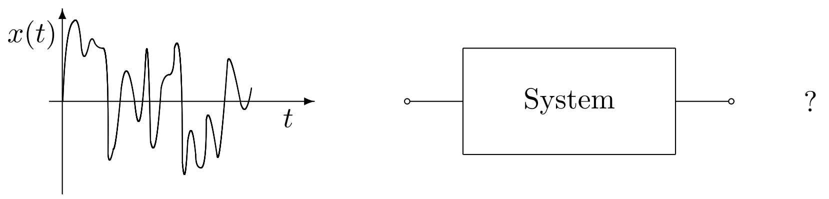
Inhaltsverzeichnis

Teil 4: Stochastische Signale und Systeme **1**

8 Stochastische Signale . . . 1
8.1 Grundlagen . . . 1
8.1.1 Eindimensionale Zufallsgrößen . . . 1
8.1.2 Mehrdimensionale Zufallsgrößen . . . 3
8.2 Zufällige Prozesse . . . 9
8.2.1 Prozess und Realisierung . . . 9
8.2.2 Verteilungs- und Dichtefunktion . . . 10
8.2.3 Vektorprozesse . . . 10
8.2.4 Spezielle Momente (einfache Prozesse) . . . 10
8.3 Stationäre Prozesse . . . 12
8.3.1 Definitionen und Eigenschaften . . . 12
8.3.2 Korrelationsfunktionen . . . 12
8.3.3 Leistungsdichtespektrum . . . 13
8.3.4 Kreuzkorrelationsfunktion und Kreuzleistungsdichtespektrum . . . 14
8.4 Spezielle Prozesse . . . 14
8.4.1 Gauß-Prozesse . . . 14
8.4.2 Markov-Prozesse . . . 14
9 Statische Systeme . . . 16
9.1 Abbildung von Zufallsgrößen . . . 16
9.1.1 Determinierte Systemabbildung . . . 16
9.1.2 Transformation der Dichtefunktion . . . 16
9.1.3 Vorgeschriebene Verteilungsfunktion . . . 19
9.1.4 Erwartungswert am Systemausgang . . . 20
9.2 Abbildungen zufälliger Prozesse . . . 20
9.2.1 Determinierte Prozessabbildung . . . 20
9.2.2 Transformation der Dichtefunktion . . . 21
9.2.3 Mittelwert und Korrelationskoeffizient am Systemausgang . . . 22
9.3 Stochastische statische Systeme . . . 22
9.3.1 Stochastische Systemabbildung . . . 22
9.3.2 Erwartungswert und bedingter Erwartungswert . . . 23
9.3.3 Stochastische Prozessabbildung . . . 24
10 Dynamische Systeme . . . 24
10.1 Analysis zufälliger Prozesse . . . 24
10.1.1 Konvergenz im quadratischen Mittel . . . 24
10.1.2 Stetigkeit im quadratischen Mittel . . . 25
10.1.3 Differentiation im quadratischen Mittel . . . 25
10.1.4 Integration im quadratischen Mittel . . . 26
10.2 Lineare dynamische Systeme . . . 27
10.2.1 Grundgleichungen . . . 27
10.2.2 Mittelwert, Korrelationsfunktion und Leistungsdichtespektrum . . . 28

10.2.3 Korrelationsfunktion am Systemausgang 29
10.2.4 Stationäre Gaußprozesse 30
10.3 Anwendungen stationärer Prozesse 32
10.3.1 Ergodizität 32
10.3.2 Schätzung von $s_X(\tau)$ bzw. $S_X(\omega)$ 32

Teil 4: Stochastische Signale und Systeme



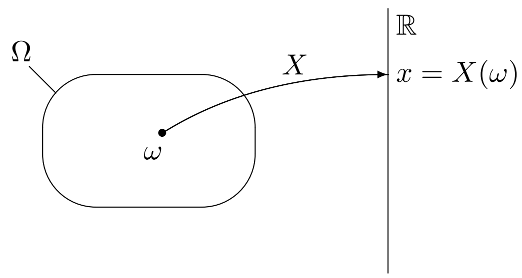
8 Stochastische Signale

8.1 Grundlagen

8.1.1 Eindimensionale Zufallsgrößen

Voraussetzungen:

- zufällige Ereignisse
- Wahrscheinlichkeit
- bedingte Wahrscheinlichkeit
- Bayessche Formel
- eindimensionale Zufallsgröße



Ω:	Ereignisraum
ω:	Elementarereignis
X:	Zufallsgröße
x:	Wert der Zufallsgröße

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x = X(\omega)$$

Zufallsgröße
- diskret (z.B. Ergebnis des Würfelns)
- stetig (z.B. Lebensdauer)

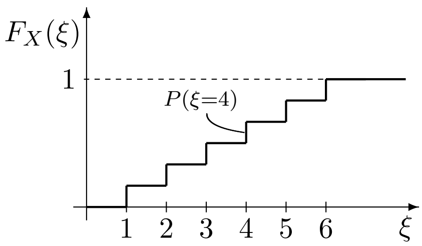
Möglichkeiten zur Beschreibung der Zufallsgröße X:

a) **Verteilungsfunktion** F_X

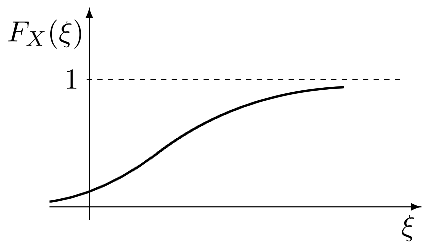
$$\boxed{F_X(\xi) = P\{X < \xi\}}$$

F_X gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß die Zufallsgröße X einen Wert annimmt, der kleiner als ξ ist.

Beispiel für diskrete ZG:



Beispiel für stetige ZG:



Eigenschaften von F_X:

1) $0 \leq F_X(\xi) \leq 1$
2) $F_X(-\infty) = 0, \quad F_X(+\infty) = 1$
3) F_X ist linksseitig stetig und nicht fallend

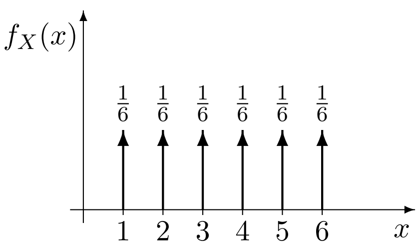
b) **Dichtefunktion** f_X

Gibt es eine integrierbare Funktion f_X derart, daß

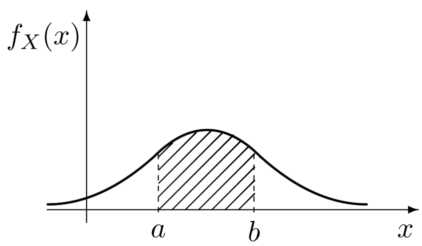
$$\boxed{F_X(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\xi} f_X(x)\,dx}$$

dann heißt f_X *Dichtefunktion* (*Dichte*) der Zufallsgröße X.

Beispiel für diskrete ZG:



Beispiel für stetige ZG:



Eigenschaften von f_X:

1) $f_X(x) \geq 0$
2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$
3) $\frac{dF_X(\xi)}{d\xi} = f_X(\xi)$

Wichtige Gleichung:

$$\boxed{P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int\limits_a^b f_X(x)\,dx}$$

c) **Mittelwerte, Momente, Erwartungswert**

Ord.	Symbol	X stetig	X diskret	Bezeichnung
		Gewöhnliche Momente		
1.	$E(X)$	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X \, dx$	$\sum\limits_i x_i \cdot P\{X = x_i\}$	Mittelwert, Erwartungswert, Gleichanteil
2.	$E(X^2)$	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X \, dx$	$\sum\limits_i {x_i}^2 \cdot P\{X = x_i\}$	Quadratischer Mittelwert, Effektivwertquadrat
$\vdots$				
$n.$	$E(X^n)$	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot f_X \, dx$	$\sum\limits_i {x_i}^n \cdot P\{X = x_i\}$	Gewöhnliches Moment n-ter Ordnung
		Zentrale Momente		
1.	$E(X - E(X))$	0	0	
2.	$E[(X - E(X))^2]$	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (X - E(X))^2 f_X(x) \, dx$	$\sum\limits_i (X - E(X))^2 P\{X = x_i\}$	Dispersion, Varianz
$\vdots$				
$n.$	$E[(X - E(X))^n]$	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (X - E(X))^n f_X(x) \, dx$	$\sum\limits_i (X - E(X))^n P\{X = x_i\}$	Zentr. Moment n-ter Ordnung

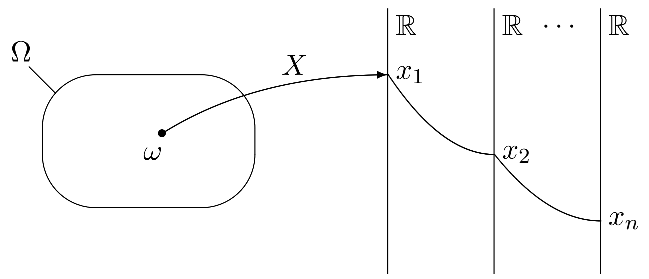
Diskussion:

- $E(X)$ ist ein zentraler Wert der Zufallsgröße X, um den sich die Werte von X gruppieren.
- Der Effektivwert $\sqrt{E(x^2)}$ ist die *Norm* der Zufallsgröße.
- Die Varianz $E[(X - E(X))^2] = \mathrm{Var}(X) = D^2(X)$ beschreibt die Streuung der Werte von X um den Erwartungswert

8.1.2 Mehrdimensionale Zufallsgrößen

Beispiel: Scheibenschießen $\to$ Zahlenpaar (x_1, x_2)

Definition: Bezeichnen X_1, X_2, $\ldots$, X_n eindimensionale Zufallsgrößen, so heißt $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *n-dimensionale Zufallsgröße* oder *zufälliger Vektor.*



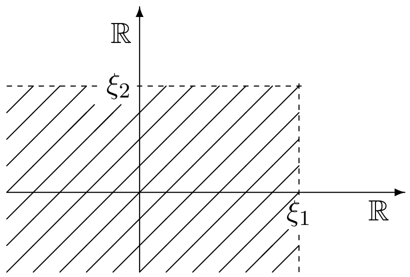
$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$X(\omega) = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Im Weiteren meist Beschränkung auf $n = 2$, d.h. $X = (X_1, X_2)$.

Mathematische Beschreibung zweidimensionaler Zufallsgrößen

a) **Verteilungsfunktion** F_X



$$\boxed{F_X(\xi_1,\, \xi_2) = P\{X_1 < \xi_1,\, X_2 < \xi_2\}}$$

Eigenschaften von F_X**:**

1) $0 \le F_X(\xi_1, \xi_2) \le 1$
2) $F_X(-\infty, \xi_2) = F_X(\xi_1, -\infty) = F_X(-\infty, -\infty) = 0,\ \ F_X(+\infty, +\infty) = 1$
3) F_X ist linksseitig stetig und nichtfallend in jeder der Komponenten ξ_1 und ξ_2.

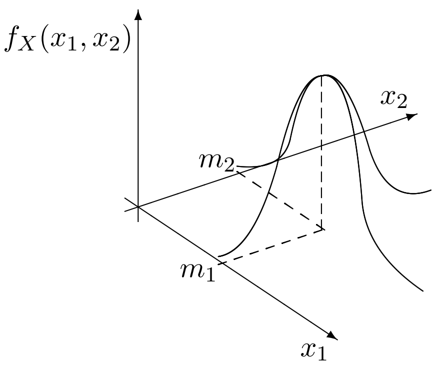
b) **Dichtefunktion** f_X

Gibt es eine Funktion f_X, so daß

$$\boxed{F_X(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{\xi_2} \int_{-\infty}^{\xi_1} f_X(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2,}$$

so heißt $f_X(x_1, x_2)$ *Dichtefunktion* des zufälligen Vektors $X = (X_1,\, X_2)$.

Beispiel: Normalverteilung



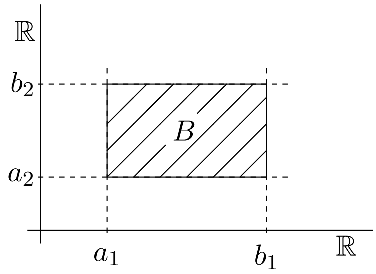
$X = (X_1\, X_2)$ heißt *normalverteilt*, wenn gilt:

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\varrho^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}\left(\frac{(x_1-m_1)^2}{{\sigma_1}^2} - 2\varrho\frac{(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-m_2)^2}{{\sigma_2}^2}\right)\right]$$

mit $m_1,\, m_2 \in \mathbb{R},\ \sigma_{1,2} > 0,\ |\varrho| \le 1$

Eigenschaften von f_X**:**

1) $f_X(x_1, x_2) \ge 0$
2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = 1$
3) $\frac{\partial F_X(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = f_X(\xi_1, \xi_2)$



$$P\{X \in B\} = P\{a_1 \leq X_1 \leq b_1,\, a_2 \leq X_2 \leq b_2\}$$

$$= F_X(b_1, b_2) - F_X(b_1, a_2) - F_X(a_1, b_2) + F_X(a_1, a_2) = \int\limits_{a_2}^{b_2} \int\limits_{a_1}^{b_1} f_X(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$$

Verallgemeinerung: $P\{X \in B\} = \iint\limits_{(B)} f_X(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$

c) **Randverteilungsfunktionen**

Gegeben sei $X = (X_1, X_2)$. Wir bilden

$$F_X(\xi_1, \infty) = P\{X_1 < \xi_1, \underbrace{X_2 < \infty}_{\substack{\text{sicheres}\\ \text{Ereignis}}}\} = P\{X_1 < \xi_1\} = F_{X_1}(\xi_1) = \int\limits_{-\infty}^{\xi_1} f_{X_1}(x_1)\, dx_1 \tag{1}$$

F_{X_1} heißt *Randverteilungsfunktion* von X_1 in $X = (X_1, X_2)$. f_{X_1} heißt *Randdichtefunktion* von X_1in $X = (X_1, X_2)$.

$$F_X(\xi_1, \infty) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\xi_1} f_X(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \int\limits_{-\infty}^{\xi_1} \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2)\, dx_2}_{\widehat{=}\ \text{Integrand von (1)}}\, dx_1$$

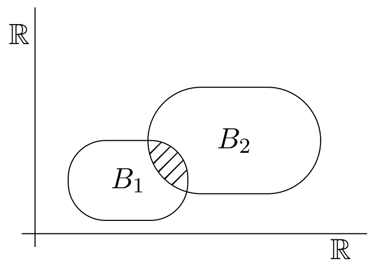
$$\boxed{f_{X_1}(x_1) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2)\, dx}$$

Analog gilt: $F_{X_2}(\xi_2) = F_X(\infty, \xi_2)$ bzw. $f_{X_2}(x_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2)\, dx_1$

d) **Bedingte Verteilungsfunktion**

gegeben: $X = (X_1, X_2)$ mit F_X bzw. f_X

gesucht: $P\{X \in B_1 | X \in B_2\}$

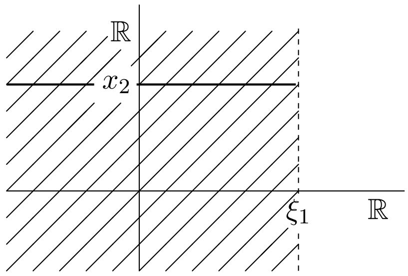


$$P\{X \in B_1 | X \in B_2\} = \frac{P\{X \in B_1,\ X \in B_2\}}{P\{X \in B_2\}} = \frac{P\{X \in B_1 \cap B_2\}}{P\{X \in B_2\}}$$

$$= \frac{\iint_{(B_1 \cap B_2)} f_X(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2}{\iint_{(B_2)} f_X(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2}$$

Sonderfall: gesucht: $P\{X_1 < \xi_1 | X_2 = x_2\} = F_{X_1}\{\xi_1|x_2\} = \int\limits_{-\infty}^{\xi_1} f_{X_1}(x_1|x_2)\,dx_1$

mit



$$\boxed{f_{X_1}(x_1|x_2) = \frac{f_X(x_1,x_2)}{f_X(x_2)}}$$

$F_{X_1}(\xi_1|x_2)$ heißt *bedingte Verteilungsfunktion*,
$f_{X_1}(x_1|x_2)$ heißt *bedingte Dichtefunktion.*

Analog gilt:

$$P\{X_2 < \xi_2|X_1 = x_1\} = F_{X_2}\{\xi_2|x_1\} = \int\limits_{-\infty}^{\xi_2} f_{X_2}(x_2|x_1)\,dx_2 \text{ mit } f_{X_2}(x_2|x_1) = \frac{f_X(x_1,x_2)}{f_X(x_1)}$$

Beachte: Die Zufallsgrößen X_1 und X_2 in einem zufälligen Vektor X mit $X = (X_1,\, X_2)$ sind unabhängig, falls

$$f_{X_1}(x_1|x_2) = \frac{f_X(x_1,x_2)}{f_{X_2}(x_2)} = f_{X_1}(x_1) \qquad \Leftrightarrow \qquad X_1 \text{ unabhängig von } X_2$$

und

$$f_{X_2}(x_2|x_1) = \frac{f_X(x_1,x_2)}{f_{X_1}(x_1)} = f_{X_2}(x_2) \qquad \Leftrightarrow \qquad X_2 \text{ unabhängig von } X_1.$$

Für unabhängige X_1, X_2 des Vektors $X = (X_1, X_2)$ gilt also:

$$\boxed{f_X(x_1,\, x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)}$$

Definition (Verallgemeinerung): Die Zufallsgrößen $X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n$ in einem zufälligen Vektor $X = (X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n)$ sind genau dann unabhängig, falls gilt:

$$f_X(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(x_n)$$

bzw.

$$F_X(\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots,\, \xi_n) = F_{X_1}(\xi_1) \cdot F_{X_2}(\xi_2) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(\xi_n).$$

Beispiel: Normalverteilung Die Dichtefunktion

$$f_X(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\varrho^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2(1-\varrho^2)} \cdot \left(\frac{(x_1-m_1)^2}{{\sigma_1}^2} - \frac{2\varrho(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-m_2)^2}{{\sigma_2}^2}\right)\right]$$

der Normalverteilung liefert für den Sonderfall $\varrho = 0$:

$$\begin{aligned} f_X(x_1,x_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{(x_1-m_1)^2}{{\sigma_1}^2} + \frac{(x_2-m_2)^2}{{\sigma_2}^2}\right)\right] \\ &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x_1-m_1)^2}{{\sigma_1}^2}\right]}_{f_{X_1}(x_1)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x_2-m_2)^2}{{\sigma_2}^2}\right]}_{f_{X_2}(x_2)} \end{aligned}$$

Es gilt also $\varrho = 0$ ist gleichbedeutend mit der Unabhängigkeit von X_1 und X_2.

e) **Spezielle Momente**

1) **Erwartungswert** eines zufälligen Vektors $X = (X_1,\, X_2,\, \dots,\, X_n)$
$E(X) = (E(X_1),\, E(X_2),\, \dots,\, E(X_n))$ definiert als n-Tupel der Erwartungswerte der Komponenten mit $E(X_i) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_i \cdot f_{X_i}(x_i)\, dx_i$ $(i = 1,\, 2,\, \dots,\, n)$.

Regel:

$$\begin{aligned} E(X_1 + X_2) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x_1 + x_2) f_X(x_1, x_2)\, dx_2\, dx_1 \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1 \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2)\, dx_2}_{f_{X_1}(x_1)} dx_1 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_2 \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2)\, dx_1}_{f_{X_2}(x_2)} dx_2 \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{X_1}(x_1)\, dx_1 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_2 f_{X_2}(x_2)\, dx_2 = E(X_1) + E(X_2) \end{aligned}$$

Damit gilt $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$ bzw. verallgemeinert

$$\boxed{E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)}$$

2) **Skalarprodukt** von X_1 und X_2

$$E(X_1 \cdot X_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot f_X(x_1,\, x_2)\, dx_2\, dx_1$$

Sonderfall: X_1 und X_2 seien unabhängig:

$$\begin{aligned} E(X_1 \cdot X_2) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)\, dx_2\, dx_1 \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot f_{X_1}(x_1)\, dx_1 \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_2 \cdot f_{X_2}(x_2)\, dx_2 = E(X_1) \cdot E(X_2) \end{aligned}$$

Damit gilt *nur für unabhängige* X_1 und X_2: $E(X_1 \cdot X_2) = E(X_1) \cdot E(X_2)$ bzw. verallgemeinert:

$$\boxed{E(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdot \ldots \cdot E(X_n)}$$

3) **Kovarianz** von X_1 und X_2 (Gemischtes Zentralmoment)

$$\begin{aligned} E((X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x_1 - E(X_1))(x_2 - E(X_2)) \cdot f_X(x_1, x_2)\, dx_2\, dx_1 \\ &= \operatorname{Cov}(X_1, X_2) \end{aligned}$$

Regel: (mit $E(a \cdot X) = a \cdot E(X)$, $E(a) = a$ für $a \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X_1,\, X_2) &= E((X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))) \\
&= E(X_1 \cdot X_2 - X_1 E(X_2) - X_2 E(X_1) + E(X_1)E(X_2)) \\
&= E(X_1 \cdot X_2) - E(X_1) \cdot E(X_2) - \cancel{E(X_2)E(X_1)} + \cancel{E(X_1)E(X_2)}
\end{aligned}$$

Sonderfall: X_1 und X_2 sind unabhängig, also $E(X_1) \cdot E(X_2) = E(X_1 \cdot X_2)$:

$$\operatorname{Cov}(X_1,\, X_2) = E(X_1)E(X_2) - E(X_2)E(X_1) = 0$$

Beachte:

a) $\operatorname{Cov}(X_1,\, X_2)$ kann zur Untersuchung der Abhängigkeit von Zufallsgrößen dienen

b) $\operatorname{Cov}(X_1,\, X_1) = \operatorname{Var}(X_1)$

4) **Korrelationskoeffizient** (normiertes Maß für die Abhängigkeit zon Zufallsgrößen):

$$\varrho = \varrho(X_1,\, X_2) = \frac{\operatorname{Cov}(X_1,\, X_2)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X_1) \cdot \operatorname{Var}(X_2)}}$$

Eigenschaften von ϱ: (Beweis: siehe Lehrbuch)

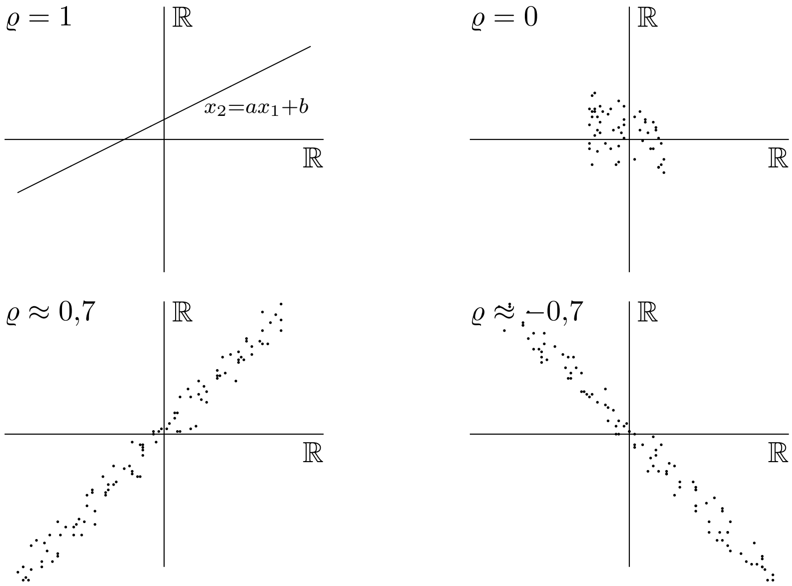
a) $\varrho^2 \leq 1$ oder $-1 \leq \varrho \leq 1$

b) $\varrho = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{Cov}(X_1,\, X_2) = 0$ d.h. X_1 und X_2 sind unkorreliert

Beachte: Unabhängige Zufallsgrößen X_1 und X_2 sind auch stets unkorreliert, aber nicht notwendigerweise umgekehrt. Sonderfall: Wenn X_1 und X_2 normalverteilt sind ist unabhängig gleichbedeutend mit unkorreliert.

c) $\varrho^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; P\{X_2 = aX_1 + b\} = 1$ mit $a,\, b \in \mathbb{R}$ dann sind X_1 und X_2 maximal korreliert.

Wahrscheinlichkeit 1 heißt nur: *fast* sicher, Wahrscheinlichkeit 0 heißt nur: *fast* unmöglich.



5) **Kovarianzmatrix** des zufälligen Vektors $X = (X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n)$

$$\begin{pmatrix}
\operatorname{Cov}(X_1, X_1) & \operatorname{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \operatorname{Cov}(X_1, X_n) \\
\operatorname{Cov}(X_2, X_1) & \operatorname{Cov}(X_2, X_2) & \cdots & \operatorname{Cov}(X_2, X_n) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\operatorname{Cov}(X_n, X_1) & \operatorname{Cov}(X_n, X_2) & \cdots & \operatorname{Cov}(X_n, X_n)
\end{pmatrix} = \operatorname{Cov} X$$

In der Hauptdiagonalen stehen die Varianzen $\operatorname{Cov}(X_i, X_i) = \operatorname{Var}(X_i)$, (mit $i = 1, 2, \ldots, n$).

Regel (ohne Beweis): $\det \operatorname{Cov}(X) = 0 \;\Leftrightarrow\; P\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + k = 0\right\} = 1$

Mit der Wahrscheinlichkeit 1 (also fast sicher) besteht zwischen den Komponenten von X eine *lineare Beziehung.*

8.2 Zufällige Prozesse

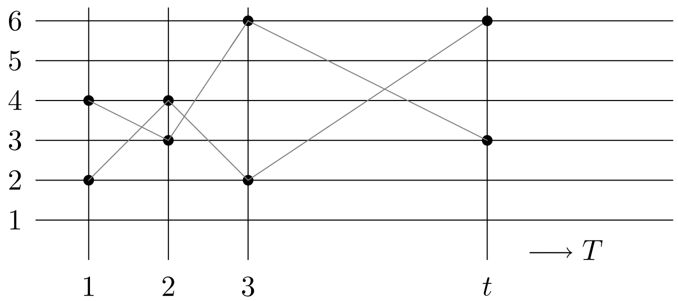
8.2.1 Prozess und Realisierung

Beispiele zufälliger Signale in Natur und Technik:

- Temperatur, Luftdruck in Abhängigkeit von der Zeit in einem bestimmten Punkt der Erdoberfläche
- Neigungswinkel eines Schiffes bei Seegang
- Durchmesser eines Webfadens in Abhängigkeit von der Länge
- Strom und Spannung in einer Fernsprechleitung
- Thermisches Rauschen eines Ohmschen Widerstandes

Die Wiederholung eines Experiments liefert unterschiedlichen *Realisierungen.*
Gesucht ist ein mathematisches Modell zur Beschreibung dieser zufälligen Signale.

Ausgangspunkt:



Zufälliger Vektor

$$X = (X_1, X_2, \ldots, X_n) = (X_i)_{i \in I}$$

I: Indexmenge, hier: Zeitskala T

Es gilt:

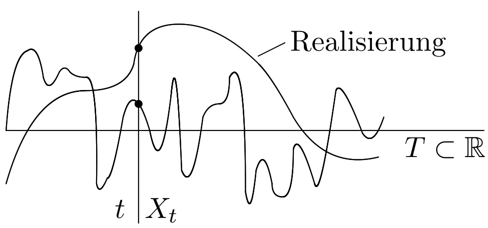
a) Die Indexmenge erhält die Bedeutung einer Zeitskala T.

b) Die Familie $(X_t)_{t \in T}$ mit $T \subset \mathbb{Z}$ von Zufallsgrößen X_t heißt *zufälliger Prozess mit diskreter Zeit.*

c) Die Folge $x = (x_t)_{t \in T}$ der auftretenden Werte heißt *Realisierung* des zufälligen Prozesses mit diskreter Zeit.

d) Verallgemeinerung: Die Familie $X = (X_t)_{t \in T}$ mit $T \subset \mathbb{R}$ von Zufallsgrößen X_t heißt *zufälliger Prozess mit stetiger Zeit.*

e) Die Realisierungen eines zufälligen Prozesses mit stetiger Zeit sind (reelle) Zeitfunktionen.

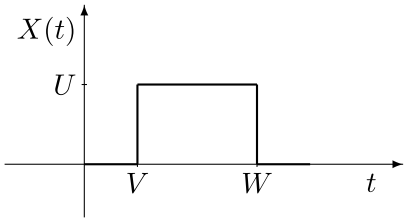


Wird ein Prozess zu einem festen Zeitpunkt t betrachtet, erhält man eine Zufallsgröße $X_t = X(t)$.

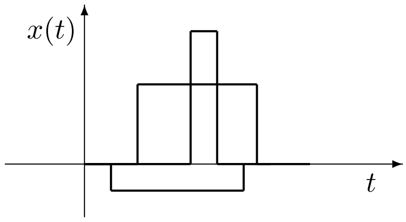
Beispiel:

$$X(t) = U \cdot (\mathbb{1}(t-V) - \mathbb{1}(t-W)) \qquad U,\, V,\, W\text{: ZGen mit bekannter Verteilungsfunktion}$$
$$x(t) \;=\; u \cdot (\mathbb{1}(t-v) - \mathbb{1}(t-w)) \qquad u,\, v,\, w\text{ : Werte der obigen Zufallsgrößen}$$

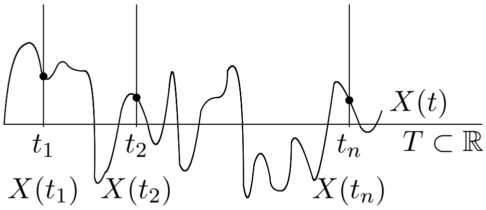
Schema:



Realisierungen:



8.2.2 Verteilungs- und Dichtefunktion



Wird ein zufälliger Prozess X zu festen Zeitpunkten $t_1,\, t_2,\, \ldots,\, t_n$ betrachtet, erhält man einen zufälligen Vektor $(X(t_1),\, X(t_2),\, \ldots,\, X(t_n))$.

Übertragung der Definitionen aus 8.1.2:

a) Verteilungsfunktion

zuf. Vektor: $F_X(\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots,\, \xi_n) = P(X_1 < \xi_1,\, X_2 < \xi_2,\, \ldots,\, X_n < \xi_n)$

zuf. Prozess: $F_X(\xi_1, t_1;\, \xi_2, t_2;\, \ldots;\, \xi_n, t_n) = P(X_1(t_1) < \xi_1,\, X_2(t_2) < \xi_2,\, \ldots, X_n(t_n) < \xi_n)$

$\rightarrow$ n-dimensionale Verteilungsfunktion des Prozesses X

Sonderfälle:

$n = 1$	$F_X(\xi, t) = P(X(t) < \xi)$	eindimensionale Vfkt
$n = 2$	$F_X(\xi_1, t_1;\, \xi_2, t_2) = P(X(t_1) < \xi_1;\, X(t_2) < \xi_2)$	zweidimensionale Vfkt

b) Dichtefunktion: Wenn sich die n-dimensionale Verteilungsfunktion F_X als

$$F_X(\xi_1, t_1;\, \xi_2, t_2;\, \ldots;\, \xi_n, t_n) = \int_{-\infty}^{\xi_1} \cdots \int_{-\infty}^{\xi_n} f_X(x_1, t_1;\, x_2, t_2;\, \ldots;\, x_n, t_n)\, dx_n \cdots dx_1$$

darstellen läßt, heißt f_X n-dimensionale Dichtefunktion dieses Prozesses X.

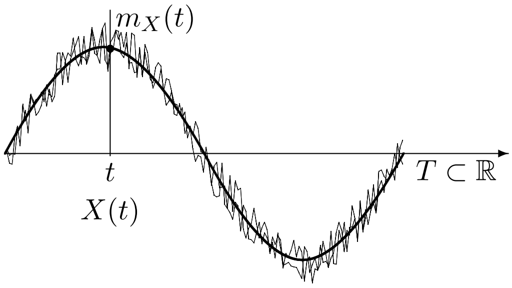
8.2.3 Vektorprozesse

Sind $X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n$ zufällige Prozesse, dann heißt $X = (X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n)$ n-dimensionaler *Vektorprozess.*

8.2.4 Spezielle Momente (einfache Prozesse)

(1) Erwartungswert

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x, t)\, dx = m_X(t) \qquad \text{zeitabhängig!}$$



Beachte: Der Erwartungswert $m_X(t)$ [dicke Linie] hat im Allgemeinen nichts zu tun mit dem zeitlichen Mittelwert einer Realisierung

(2) Varianz

$$E\left[(X(t) - m_X(t))^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X(t))^2 f_X(x,t)\,dx = \mathrm{Var}\,(x)$$

(3) Korrelationsfunktion (Autokorrelationsfunktion, AKF)

$$E\left[X(t_1)X(t_2)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \cdot f_X(x_1,t_1;\, x_2,t_2)\,dx_2\,dx_1 = s_X(t_1,\, t_2) = \psi_{XX}(t_1,\, t_2)$$

Eigenschaften:

a) $s_X(t_1,\, t_2) = s_X(t_2,\, t_1)$

b) $s_X(t,t) = E\left[X^2(t)\right] \geq 0$

(4) Kovarianzfunktion

$$E\left[(X(t_1) - m_X(t_1))(X(t_2) - m_X(t_2))\right] =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_X(t_1))(x_2 - m_X(t_2)) f_X(x_1,t_1;\, x_2,t_2)\,dx_2\,dx_1 = \mathrm{Cov}\,(X(t_1),\, X(t_2))$$

Eigenschaften:

a) $\mathrm{Cov}\,(X(t_1),\, X(t_2)) = E\left[X(t_1)X(t_2)\right] - E\left[X(t_1)\right]E[X(t_2)] = s_X(t_1,\, t_2) - m_X(t_1)\cdot m_X(t_2)$

b) $\mathrm{Cov}\,(X(t),\, X(t)) = \mathrm{Var}\,(X(t))$

(5) Kovarianzmatrix

$$\mathrm{Cov}\,(X) = \begin{pmatrix} \mathrm{Cov}\,(X(t_1),X(t_1)) & \mathrm{Cov}\,(X(t_1),X(t_2)) & \cdots & \mathrm{Cov}\,(X(t_1),X(t_n)) \\ \mathrm{Cov}\,(X(t_2),X(t_1)) & \mathrm{Cov}\,(X(t_2),X(t_2)) & \cdots & \mathrm{Cov}\,(X(t_2),X(t_n)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}\,(X(t_n),X(t_1)) & \mathrm{Cov}\,(X(t_n),X(t_2)) & \cdots & \mathrm{Cov}\,(X(t_n),X(t_n)) \end{pmatrix}$$

(6) Kreuzkorrelationsfunktion (zwei Prozesse X und Y)

$$E[X(t_1)Y(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy \cdot f_{(XY)}(x,t_1;\, y,t_2)\,dy\,dx = s_{XY}(t_1,\, t_2) = \psi_{XY}(t_1,\, t_2)$$

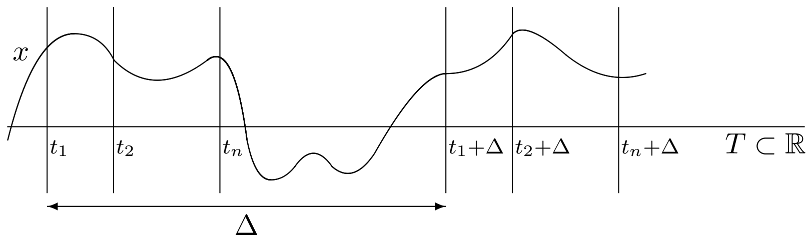
Eigenschaften:

a) $s_{XY}(t_1,\, t_2) = s_{YX}(t_2,\, t_1)$

b) $s_{XX}(t_1,\, t_2) = s_X(t_1,\, t_2)$ (AKF)

8.3 Stationäre Prozesse

8.3.1 Definitionen und Eigenschaften



Definition: Der zufällige Prozess X heißt *stationär*, wenn für beliebige n uund Δ gilt:

$$F_X(\xi_1, t_1;\, \xi_2, t_2;\, \ldots;\, \xi_n, t_n) = F_X(\xi_1, t_1+\Delta;\, \xi_2, t_2+\Delta;\, \ldots;\, \xi_n, t_n+\Delta)$$

Entsprechendes gilt für die Dichtefunktion.

Folgerungen

n=1: In $f_X(x,\, t+\Delta) = f_X(x,\, t)$ ist Δ beliebig, also auch $\Delta = -t$.

$\Rightarrow f_X(x,\, t) = f_X(x,\, 0)$ zeitunabhängig

$$\Rightarrow E[X(t)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_X(x,\, 0)\, dx = m_X(0) = m_X = \text{const}$$

n=2: In $f_X(x_1, t_1+\Delta;\, x_2, t_2+\Delta) = f_X(x_1, t_1;\, x_2, t_2)$ ist Δ beliebig, also auch $\Delta = -t_1$.

$$\Rightarrow f_X(x_1, t_1;\, x_2, t_2) = f_X(x_1, 0;\, x_2, \underbrace{t_2 - t_1}_{\tau})$$

$$\Rightarrow s_X(t_1,\, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = s_X(t_2 - t_1) = \boxed{s_X(\tau) = E[X(t) \cdot X(t+\tau)]}$$

Definition: X heißt *schwach stationär* (stationär im weiteren Sinne), wenn

a) $e[x(t)] = m_x = \text{const}$

b) $e[x(t_1)x(t_2)] = s_x(t_1,\, t_2) = s_x(t_2 - t_1) = s_x(\tau)$

c) $e\big[x^2(t)\big] < \infty$

Im weiteren werden in 8.3 stationäre Prozesse mit $m_X = 0$ betrachtet.

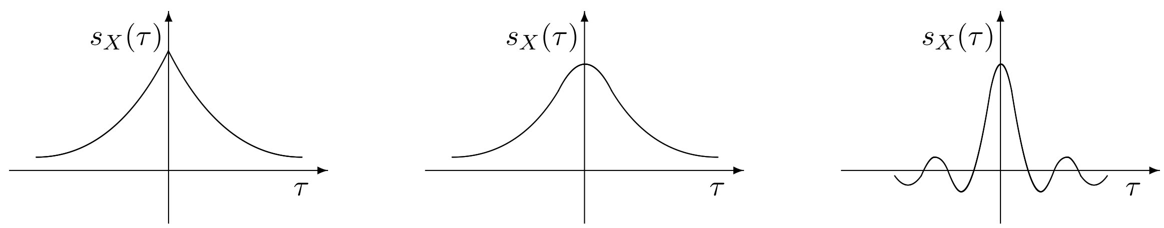
8.3.2 Korrelationsfunktionen

Eigenschaften:

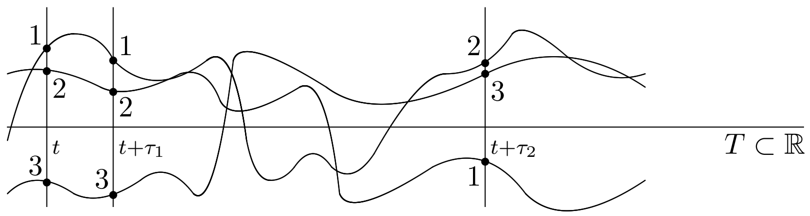
a) $s_X(\tau) = s_X(-\tau)$ (gerade Funktion)

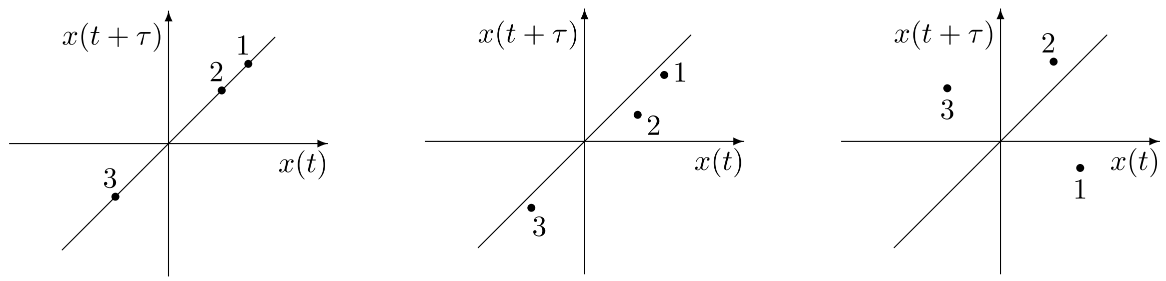
b) $|s_X(\tau)| \le s_X(0)$ (s. Aufgabe 8.21)

Typische Verläufe:



Anschauliche Erklärung der AKF





$\tau = 0$ maximal korreliert $\quad$ $\tau = \tau_1$ stark korreliert $\quad$ $\tau = \tau_2$ schwach korreliert

8.3.3 Leistungsdichtespektrum

Sei $s_X(\tau)$ überall stetig und absolut integrierbar. Dann sei

$$S_X(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s_X(\tau) \cdot e^{j\omega\tau}\, d\tau, \qquad s_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) \cdot e^{j\omega\tau}\, d\omega.$$

Die Bildfunktion $S_X(\omega)$ heißt *Leistungsdichtespektrum* (Theorem von Wiener und Хинчин).

Bedeutung von $S_X(\omega)$:

- leicht messtechnisch erfassbar
- einfache Zusammenhänge bei linearen Systemen

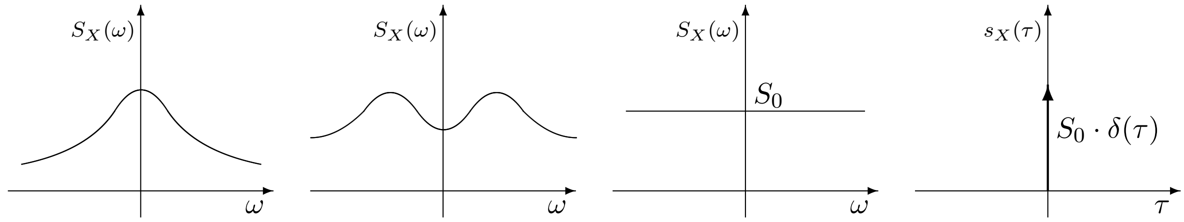
Eigenschaften von $S_X(\omega)$:

(1) $S_X(\omega) = S_X(-\omega)$ (gerade Funktion)

(2) $S_X(\omega) \geq 0$ (reell)

(3) $E[X^2(t)] = S_X(0) = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)\, \underbrace{e^{-j\omega\tau}}_{1}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)\, d\omega \geq 0$

Typische Verläufe: (1–3, 4: AKF von 3., weißes Rauschen)



Definition: Ein zufälliger Prozess mit $S_X(\omega) = S_0 = \text{const}$ heißt *weißes Rauschen*. Idealisierung, weil $E[X^2(t)] \to \infty$.

8.3.4 Kreuzkorrelationsfunktion und Kreuzleistungsdichtespektrum

Zwei stationäre Prozesse X und Y.

$$f_{(X,Y)}(x,t_1;\,y,t_2) = f_{(X,Y)}(x,t_1+\Delta;\,y;t_2+\Delta)$$

(*stationär verbundene Prozesse*). Dann gilt analog zu 8.3.1:

$$s_{XY}(t_1,\,t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] = s_{XY}(0,t_2-t_1) = s_{XY}(\tau)$$

mit den Eigenschaften: $\quad s_{XY}(\tau) = s_{YX}(-\tau) \quad$ und $\quad s_{XY}(-\tau) = s_{YX}(\tau)$

Definition: Kreuzleistungsdichtespektrum

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{XY}(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau, \qquad s_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\omega)e^{j\omega\tau}\,d\omega$$

8.4 Spezielle Prozesse

8.4.1 Gauß-Prozesse

Ein zufälliger Prozess heißt *Gauß-Prozess* oder *normaler Prozess*, falls:

$$f_X(x_1,t_1;\,\ldots;\,x_n,t_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-m)C^{-1}(x-m)'\right\}$$

$(x-m) = \begin{pmatrix} x_1 - m_X(t_1) & x_2 - m_X(t_2) & \cdots & x_n - m_X(t_n)\end{pmatrix}$ Zeilenvektor

$(x-m)' = (x-m)^T = \begin{pmatrix} x_1 - m_X(t_1) \\ x_2 - m_X(t_2) \\ \cdots \\ x_n - m_X(t_n)\end{pmatrix}$ Spaltenvektor

$C = \begin{pmatrix} \mathrm{Cov}\,(X(t_1),X(t_1)) & \cdots & \mathrm{Cov}\,(X(t_1),X(t_n)) \\ \mathrm{Cov}\,(X(t_2),X(t_1)) & \cdots & \mathrm{Cov}\,(X(t_2),X(t_n)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}\,(X(t_n),X(t_1)) & \cdots & \mathrm{Cov}\,(X(t_n),X(t_n)) \end{pmatrix}$ Kovarianzmatrix

$\mathrm{Cov}\,(X(t_i),X(t_j)) = s_X(t_i,\,t_j) - m_X(t_i)\cdot m_X(t_j)$

Beachte: Der Gauß-Prozess ist durch $m_X(t)$ und $s_X(t_1,\,t_2)$ vollständig charakterisiert.

8.4.2 Markov-Prozesse

Folge aufeinanderfolgender Zeitpunkte: $t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_n$

Definition 1: Ein Prozess X heißt *rein stochastisch* (ohne Gedächtnis), falls

$$f_X(x_n\,t_n|\underbrace{x_1,t_1;\,x_2,t_2;\,\ldots;\,x_{n-1},t_{n-1}}_{\text{bekannte Vergangenheit}}) = f_X(x_n\,t_n)$$

z.B. Würfeln.

Definition 2: Ein Prozess heißt *Markov-Prozess*, wenn

$$f_X(x_n\, t_n | x_1, t_1;\, x_2, t_2;\, \ldots;\, x_{n-1}, t_{n-1}) = f_X(x_n\, t_n | x_{n-1}, t_{n-1})$$

z.B. Automat

Beispiel: Wiener-Prozess (Brausche Bewegung); $T = [0,\, \infty)$

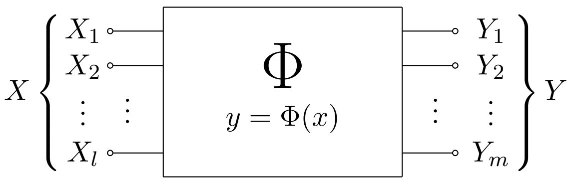
$$f_X(x, t) = \begin{cases} \delta(x) & t = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) & t > 0 \end{cases}$$

$$f_X(x_2, t_2 | x_1, t_1) = \begin{cases} \delta(x_2 - x_1) & t_2 = t_1 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} \exp\left[-\frac{(x_2 - x_1)^2}{2(t_2 - t_1)}\right] & \text{sonst} \end{cases}$$

9 Statische Systeme

9.1 Abbildung von Zufallsgrößen

9.1.1 Determinierte Systemabbildung



Definition: Ein statistisches System heißt *determiniert*, falls für alle $\omega \in \Omega$ gilt, daß mit $y = Y(\omega)$ und $x = X(\omega)$ gilt:

$$y = \Phi(x)$$

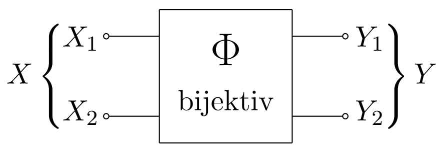
[Stochastische Systemabbildung → 9.3.1]

9.1.2 Transformation der Dichtefunktion

gegeben: Zufälliger Vektor X mit F_X oder f_X, Systemabbildung Φ

gesucht: F_Y oder f_y des zufälligen Vektors Y am Systemausgang

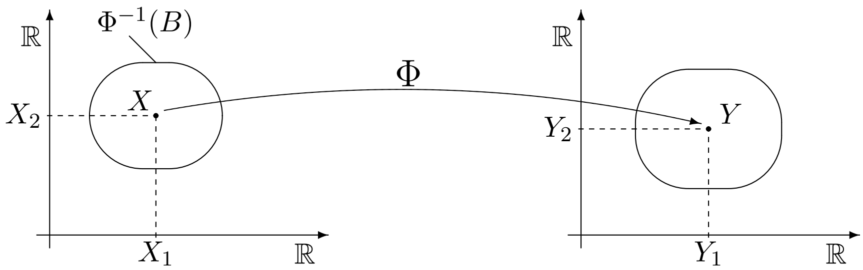
Zunächst: Lösung für den Sonderfall $l = m = 2$ und Φ bijektiv.



$Y = \Phi(X)$ bestehe aus den Teilabbildungen

$$Y_1 = \varphi_1(X_1,\, X_2)$$
$$Y_2 = \varphi_2(X_1,\, X_2)$$

Dann gilt für die Werte der Zufallsgrößen $Y_1 = \varphi(x_1,\, x_2)$ und $Y_2 = \varphi(x_1, x_2)$:



Da Φ bijektiv sein soll, folgt:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = {\varphi_1}^{-1}(Y_1,\, Y_2) \\ X_2 = {\varphi_2}^{-1}(Y_1,\, Y_2) \end{array}\right\} \quad X = \Phi^{-1}(Y)$$

Ansatz: $P(Y \in B) = P(X \in \Phi^{-1}(B))$, mit Variablentransformation (→ Analysis)

$$\iint\limits_{(B)} \underbrace{f_Y(y_1, y_2)}_{\text{gesucht}}\, dy_2\, dy_1 = \iint\limits_{(\Phi^{-1}(B))} \underbrace{f_X(x_1, x_2)}_{\text{bekannt}}\, dx_2\, dx_1 = \iint \frac{f_X({\varphi_1}^{-1}(y_1, y_2), {\varphi_2}^{-1}(y_1, y_2))}{\left|\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x_1, x_2)}\right|}\, dy_2\, dy_1$$

mit der sogenannten *Funktionaldeterminante*:

$$\left|\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x_1, x_2)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\varphi_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix}\right|$$

Dann gilt umso genauer, je kleiner B, aber auch allgemein:

$$f_Y(y_1, y_2) = \left(\frac{f_X(x_1, x_2)}{\frac{\partial \varphi_1(x_1, x_2)}{\partial(x_1, x_2)}} \right)_{\substack{x_1 = \varphi_1{}^{-1}(y_1, y_2) \\ x_2 = \varphi_2{}^{-1}(y_1, y_2)}}$$

Sonderfall $l = m = 1$:

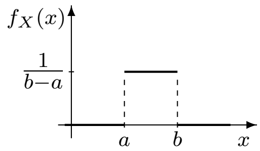
$$f_Y(y) = \left(\frac{f_X(x)}{\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|} \right)_{x = \varphi^{-1}(y)}$$

Beispiele

1. Beispiel: $l = m = 1$ $\qquad X \circ\!\!-\!\!\boxed{(...)^3}\!\!-\!\!\circ\, Y \qquad Y = \varphi(X) = X^3$

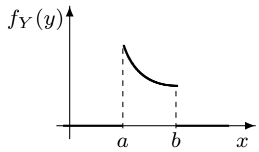
   gegeben:

   $$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-1} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   gesucht: $f_Y(y)$

   1. $y = \varphi(x) = x^3$
   2. Funktionaldeterminante: $\left| \frac{d\varphi(x)}{dx} \right| = 3x^2$
   3. Umkehrfunktion: $x = \varphi^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$
   4. Einsetzen $\rightarrow$ Dichte

   $$\Rightarrow \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \frac{1}{3(\sqrt[3]{y})^2} & a^3 \leq y \leq b^3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Beispiel: $l = 2$, $m = 1$. $\quad Y_1 = \varphi_1(X_1, X_2) = X_1 + X_2, \quad Y_2 = \varphi_2(X_1, X_2) = X_2$

   gegeben: $f_X(x_1, x_2)$, $\quad$ **gesucht:** $f_Y(y)$

   1. Werte: $\quad y_1 = \varphi_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \qquad y_2 = \varphi_2(x_1, x_2) = x_2$
   2. Funktionaldeterminante

      $$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

   3. Umkehrfunktion

      $$x_1 = \varphi_1{}^{-1}(y_1, y_2) = y_1 - y_2 \qquad x_2 = \varphi_2{}^{-1}(y_1, y_2) = y_2$$

   4. Einsetzen $\rightarrow$ Dichte

      $$f_Y(y_1, y_2) = \left(\frac{f_X(x_1, x_2)}{1} \right)_{\substack{x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2}} = f_X(y_1 - y_2, y_2)$$

5. Übergang zur Randdichte

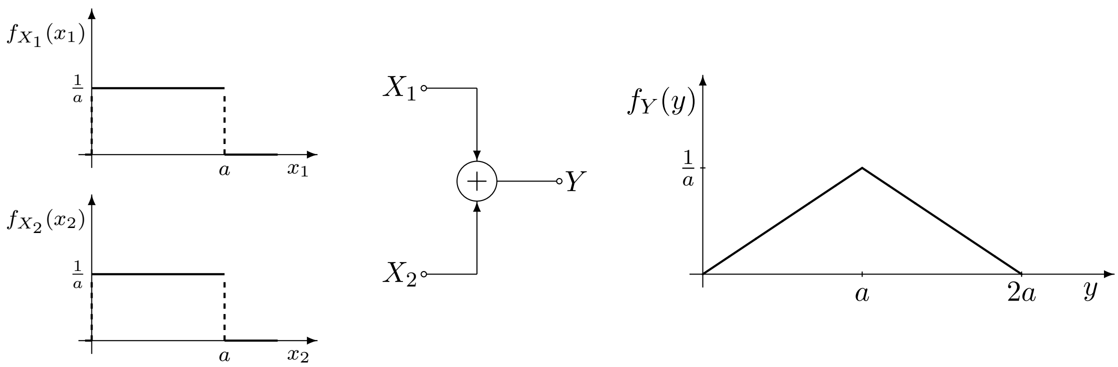
$$f_Y(y) = f_{Y_1}(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_Y(y_1, y_2)\, dy_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(y_1 - y_2, y_2)\, dy_2$$

Sonderfall: x_1, x_2 unabhängig $\rightarrow f_X(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)$

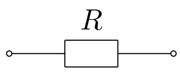
$$f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y_1 - y_2) \cdot f_{X_2}(y_2)\, dy_2 = (f_{X_1} * f_{X_2})(y)$$

Bei der Summation unabhängiger ZGen werden ihre Dichtefunktionen gefaltet.

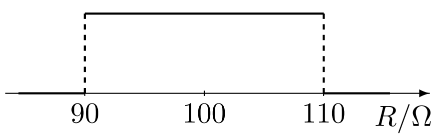
Konkreter Fall:

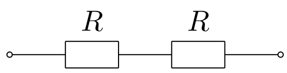


z.B. Fertigungstoleranzen von Widerständen, Annäherung an die Normalverteilung

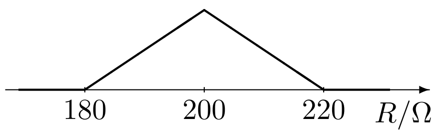


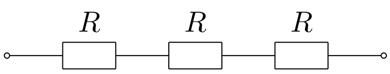
$R = (100 \pm 10)\,\Omega$



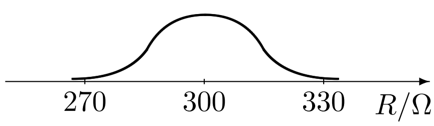


$R = (200 \pm 20)\,\Omega$

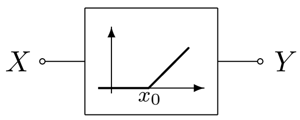




$R = (300 \pm 30)\,\Omega$



3. Beispiel: $l = m = 1$, aber φ nicht bijektiv.



$$Y = \varphi(X) = \begin{cases} 0 & X \leq x_0 \\ aX - b & X > x_0 \end{cases}$$

mit a, $b > 0$

Einweggleichrichter mit Vorspannung

gegeben: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$

gesucht: $f_Y(y)$

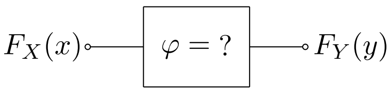
Betrachtung der Kennlinie:

1. $P\{Y < 0\} = 0$
2. $P\{Y = 0\} = P\{X < x_0\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = p_0$ (Tabelle)
3. $P\{Y > 0\}$: φ ist bijektiv

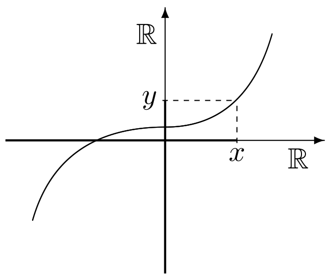
Werte:	$y = \varphi(x) = a \cdot x + b$
Funktionaldeterminante:	$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = a$
Umkehrfunktion:	$x = \varphi^{-1}(y) = \frac{1}{a}(y + b)$
Dichte:	$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a^2}(y+b)^2}$ $\quad y > 0$, sonst 0.

Ergebnis ist eine *gemischte Dichte*.

9.1.3 Vorgeschriebene Verteilungsfunktion



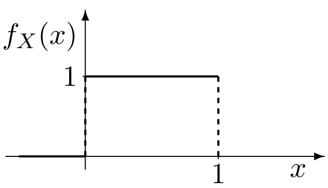
$l = m = 1$. **Gegeben:** $F_X(x)$, **gewünscht:** $F_Y(y)$. Lösung unter der Voraussetzung, dass Systemabbildung bijektiv ist.

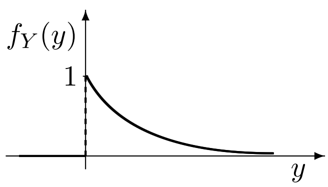


$$P\{X < x\} = P\{Y < y\}$$
$$F_X(x) = F_Y(y)$$
$$F_X(x) = F_Y(\varphi(x))$$

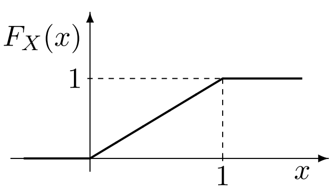
$$\boxed{\varphi(x) = {F_Y}^{-1}(F_X(x))}$$

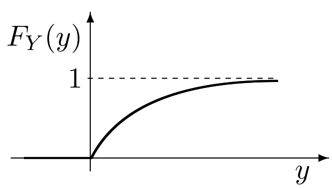
Beispiel:





$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$





$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - e^{-y} & y > 0 \end{cases}$$

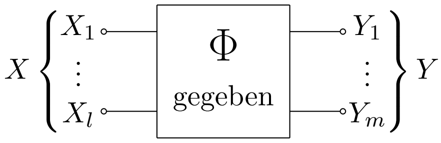
Berechnung der Umkehrfunktion

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) = 1 - e^{-y} &= z \\
e^{-y} &= 1 - z \\
y &= \ln \frac{1}{1-z} = {F_Y}^{-1}(z)
\end{aligned}
\qquad\qquad
\varphi(x) = {F_Y}^{-1}(F_X(x)) = \ln \frac{1}{1 - F_X(x)}
$$

Praktisch kommt nur vor: $0 < x < 1$, d.h. $F_X(x) = x$

$$\boxed{\varphi(x) = \ln \frac{1}{1-x}, \qquad 0 < x < 1}$$

9.1.4 Erwartungswert am Systemausgang



gegeben: f_X, Φ, $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$

gesucht: $E(Y) = (E(Y_1), E(Y_2), \ldots, E(Y_m))$

$$Y_i = \varphi_i(X) = \varphi_i(X_1, X_2, \ldots, X_l) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

$$E(Y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} y_i \cdot f_{Y_i}(y_i)\, dy_i \qquad \Rightarrow \text{ mühsam, da } f_{Y_i} \text{ berechnet werden muss.}$$

Einfacher gilt:

$$\boxed{E(Y_i) = E(\varphi(X_1, \ldots, X_l)) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(x_1, \ldots, x_l) \cdot f_X(x_1, \ldots, x_l)\, dx_1 \ldots dx_l}$$

Bekannte Sonderfälle

$\varphi(X) = X$	$E(\varphi(X))$	$= E(X)$	$= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx$	s. 8.1.1
$\varphi(X) = X^2$	$E(\varphi(X))$	$= E(X^2)$	$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx$	s. 8.1.1
$\varphi(X) = X_1 X_2$	$E(\varphi(X_1, X_2))$	$= E(X_1 X_2)$	$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_X(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$	s. 8.1.2

9.2 Abbildungen zufälliger Prozesse

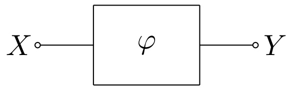
9.2.1 Determinierte Prozessabbildung

Definitionen:

1. $\mathbb{X}$: Menge aller l-dimensionalen Eingabevektorprozesse, $X = (X_1, X_2, \ldots, X_l)$
   $\mathbb{Y}$: Menge aller m-dimensionalen Ausgabevektorprozesse, $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$
2. Prozessabbildung: $\Phi : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, $\Phi(X) = Y$
3. Determinierte Prozessabbildung: $\Phi(x) = y$
   (Ausgaberealisierung ist durch Eingaberealisierung festgelegt)
4. Statische determinierte Prozessabbildung: $\Phi(X(t)) = Y(t)$ oder $\Phi(x(t)) = y(t)$
   $\Rightarrow$ Rechenmethoden aus 9.1 können auf Prozesse übertragen werden

9.2.2 Transformation der Dichtefunktion

Prozess mit f_X



Prozess mit $f_Y = ?$

Sei zunächst $l = m = 1$.

$Y = \varphi(X), \quad \varphi$ sei bijektiv

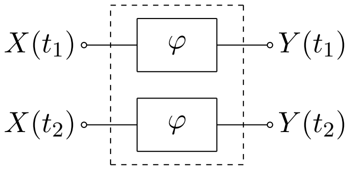
1. Schritt: eindimensionale Dichte $f_Y(y,t) = ?$. $\quad t$ fest: $\underbrace{Y(t)}_{\text{ZG}} = \varphi(\underbrace{X(t)}_{\text{ZG}})$, $y(t) = \varphi(x(t))$.

Damit Situation wie in 9.1.2: $f_Y(y) = \left(\dfrac{f_X(x)}{\left|\frac{d\varphi(x)}{dx}\right|}\right)_{x=\varphi^{-1}(y)} \Rightarrow f_Y(y,t) = \left(\dfrac{f_X(x,t)}{\left|\frac{d\varphi(x)}{dx}\right|}\right)_{x=\varphi^{-1}(y)}$

Schritt 2: $f_Y(y_1, t_1;\, y_2, t_2) = ?$

t_1 fest:

t_2 fest:



$y_2 = \varphi(x_2) = \varphi_2(x_1,\, x_2)$

$y_1 = \varphi(x_1) = \varphi_1(x_1,\, x_2)$

Mit 9.1.2.:

$$f_Y(y_1, y_2) = \left(\frac{f_X(x_1, x_2)}{\left|\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(x_1,x_2)}\right|}\right)_{\substack{x_1=\varphi_1{}^{-1}(y_1,y_2)\\ x_2=\varphi_2{}^{-1}(y_1,y_2)}}, \text{ wobei}$$

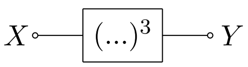
$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(x_1,x_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f_Y(y_1, t_1;\, y_2, t_2) = \left(\frac{f_X(x_1, t_1;\, x_2, t_2)}{\left|\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial\varphi(x_2)}{\partial x_2}\right|}\right)_{\substack{x_1=\varphi^{-1}(y_1)\\ x_2=\varphi^{-1}(y_2)}}}$$

Schritt 3:

$$\boxed{f_Y(y_1, t_1;\, \ldots;\, y_n, t_n) = \left(\frac{f_X(x_1, t_1;\, \ldots;\, x_n, t_n)}{\left|\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial\varphi(x_n)}{\partial x_n}\right|}\right)_{\substack{x_i=\varphi^{-1}(y_i)\\ i=1,\ldots,n}}}$$

Beispiel: (Fortsetzung von 9.1.2)



$Y = \varphi(X) = X^3 \qquad$ ist bijektiv

1. t fest: $\quad y = \varphi(x) = x^3$

   Funktionaldeterminante: $\frac{d\varphi(x)}{dx} = 3x^2$

   Umkehrfunktion: $\quad x = \varphi^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$

   $\Rightarrow$ Dichte: $f_Y(y,t) = \left(\dfrac{f_X(x,t)}{\left|\frac{d\varphi(x)}{dx}\right|}\right)_{x=\varphi^{-1}(y)} = \left(\dfrac{f_X(x,t)}{3x^2}\right)_{x=\sqrt[3]{y}} = \dfrac{f_X(\sqrt[3]{y},t)}{3\sqrt[3]{y^2}}$

2. t_1, t_2 fest.

$$\begin{aligned}
y_1 &= \varphi(x_1) = {x_1}^3 & \frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_1} &= 3{x_1}^2 & x_1 &= \varphi^{-1}(y_1) = \sqrt[3]{y_1} \\
y_2 &= \varphi(x_2) = {x_2}^3 & \frac{\partial\varphi(x_2)}{\partial x_2} &= 3{x_2}^2 & x_2 &= \varphi^{-1}(y_2) = \sqrt[3]{y_2}
\end{aligned}$$

$$f_y(y_1, t_1;\, y_2, t_2) = \left(\frac{f_X(x_1, t_1; y_2, t_2)}{3{x_1}^2 \cdot 3{x_2}^2} \right)_{\substack{x_1 = \sqrt[3]{y_1} \\ x_2 = \sqrt[3]{y_2}}} = \frac{f_X(\sqrt[3]{y_1}, t_1;\ \sqrt[3]{y_2}, t_2)}{9(\sqrt[3]{y_1 y_2})^2}$$

n-dimensionale Dichte analog.

9.2.3 Mittelwert und Korrelationskoeffizient am Systemausgang

$$\text{Prozess } X \circ\!\!-\!\!-\!\!\boxed{\;\varphi\;}\!\!-\!\!-\!\!\circ \text{Prozess } Y$$

gesucht: $m_Y(t)$, $s_Y(t_1, t_2)$

Unter 9.1.4:

$$E(Y_i) = E(\varphi(X_1, \ldots, X_l)) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(x_1, \ldots, x_l) \cdot f_X(x_1, \ldots, x_l)\, dx_1 \ldots dx_l$$

Daraus folgt speziell:

$$m_Y(t) = E(Y(t)) = E(\varphi(X(t))) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_X(x, t)\, dx$$

$$\begin{aligned}
s_Y(t_1, t_2) &= E(Y(t_1)Y(t_2)) = E(\varphi(X(t_1))\varphi(X(t_2))) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1)\varphi(x_2) \cdot f_X(x_1, t_1;\, x_2, t_2)\, dx_1\, dx_2
\end{aligned}$$

9.3 Stochastische statische Systeme

9.3.1 Stochastische Systemabbildung

$$\text{ZG } X \circ\!\!-\!\!-\!\!\boxed{\begin{matrix}\text{stochastische}\\ \text{Systemabb.}\end{matrix}}\!\!-\!\!-\!\!\circ \text{ZG } Y$$

Eingabe x (fest) $\Rightarrow$ ZG Y mit von x abh. Dichte $f(y|x)$

Die Systemabbildung φ heißt *stochastisch*, wenn

$$\boxed{f(y|x) = \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_X(x)}.}$$

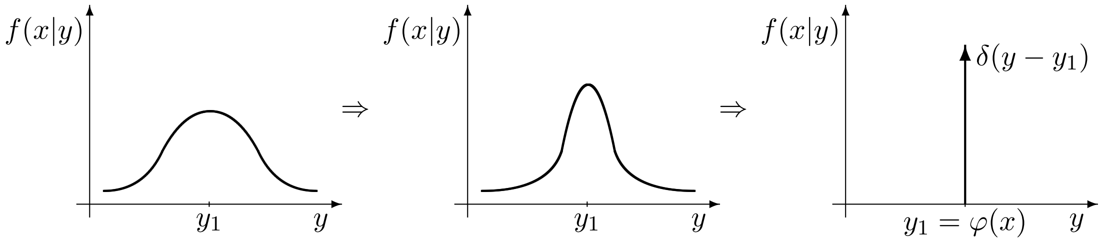
Folgerungen:

1. Dichte am Ausgang:

$$\boxed{f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, y)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} d(y|x) \cdot f_X(x)\, dx}$$

Die stochastische Systemabbildung wird durch $f(\cdot|\cdot)$ dargestellt.

2. Determiniertes System als Sonderfall des stochastischen Systems



$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y-\varphi(x)) \cdot f_X(x)\,dx \qquad \varphi(x) := u,\ \frac{du}{dx} = \varphi'(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y-u) \cdot \left(\frac{f_X(x)}{|\varphi'(x)|}\right)_{x=\varphi'(u)} du$$

9.3.2 Erwartungswert und bedingter Erwartungswert

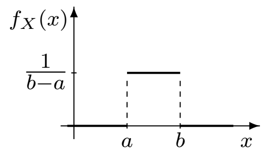
$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y|x) \cdot f_X(x)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(y|x)dy}_{\substack{\Psi(x)=E(Y|x) \\ \text{bed. Erwartungswert}}} \quad f_X(x)\,dx$$

$$\boxed{E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \cdot f_X(x)\,dx}$$

Beispiel: System, gegeben: $f_X(x)$, $f(x|y)$, gesucht: $f_Y(y)$, $E(Y)$.

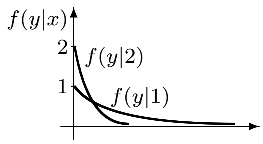
1. gegebene Gleichverteilung am Eingang

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-1} & a \le x \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad 0 < a < b$$



2. Systemabbildung

$$f(y|x) = \begin{cases} |x| \cdot e^{-|x|y} & y > 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$



3. Dichte

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y|x)\,f_X(x)\,dx = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{b-a} x e^{-xy}\,dy = \frac{e^{-ay}(ay+1)-e^{-by}(by+1)}{(b-a)y^2} & y > 0 \end{cases}$$

4. Erwartungswerte

$$\Psi(x) = E(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\,f(y|x)\,dy \overset{y\geq 0}{=} \int_{0}^{\infty} y|x|e^{-|x|y}\,dy = [\ldots] = \frac{1}{|x|}$$

$$E(Y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) f_X(x)\, dx = \int\limits_a^b \frac{1}{x} \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \ln \frac{b}{x}$$

9.3.3 Stochastische Prozessabbildung

$$\text{Prozess } X \circ\!\!-\!\!-\boxed{f(\cdot|\cdot)}-\!\!-\!\!\circ\, \text{Prozess } Y$$

$l = m = 1$

$f_X(x)$ bekannt, $f_Y = ?$

Analog zu 9.3.1 gilt:

$$f_Y(y_1, t_1; \ldots; y_n, t_n) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(y_1, \ldots, y_n | x_1, \ldots, x_n)}_{\substack{f(y_1|x_1)\cdots f(y_n|x_n) \\ \text{ergibt sich aus der Eigenschaft} \\ \text{daß System statisch ist}}} f_X(x_1, t_1; \ldots; x_n, t_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

10 Dynamische Systeme

10.1 Analysis zufälliger Prozesse

10.1.1 Konvergenz im quadratischen Mittel

Definition: Menge aller Zufallsgrößen mit endlichem quadratischen Mittelwert

$$\mathbb{L}_2 = \left\{ X | E(X^2) < \infty \right\}$$

Eigenschaften:

1. $\mathbb{L}_2$ bildet einen lineare Raum
2. Norm $||X|| = \sqrt{E(X^2)}$ (vgl. 8.1.1)
3. „Abstand“ zweier Zufallsgrößen: $||X_1 - X_2|| = \sqrt{E((X_1 - X_2)^2)}$
   $\rightsquigarrow ||X_1 - X_2|| = 0 \Leftrightarrow P\{X_1 = X_2\} = 1$

Definition: Die Folge $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Zufallsgrößen heißt *konvergent im quadratischen Mittel* (i.q.M.) gegen die Zufallsgröße X_i falls

$$||X_i - X|| \to 0 \quad \text{für} \quad i \to \infty.$$

Schreibweise:

$$\boxed{\underset{i\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, X_i = X}$$

l.i.m = „limes in medio“, „limit in mean“

Wichtige Regel:

$$E(X) = E\Big(\underbrace{\underset{i\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, X_i}_{\substack{\text{Grenzwert} \\ \text{i.q.M.}}}\Big) = \underbrace{\lim_{i\to\infty} E(X_i)}_{\substack{\text{gewöhnlicher} \\ \text{Mittelwert}}}$$

10.1.2 Stetigkeit im quadratischen Mittel

Definition: Ein zufälliger Prozess $X = (X_t)_{t \in T}$ heißt *Prozess zweiter Ordnung*, falls für alle $t \in T$ gilt:

$$X_t \; X(t) \in \mathbb{L}_2$$

(Prozess hat für jeden endlichen Zeitpunkt einen endlichen quadratischen Mittelwert). Das wird weiterhin vorausgesetzt.

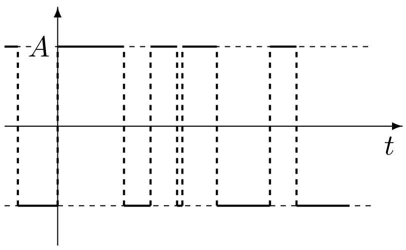
Definition: Ein zufälliger Prozess X heißt *stetig im quadrat. Mittel*, falls für alle $t \in T$ gilt:

$$\underset{\tau \to 0}{\text{l.i.m.}}\, X(t+\tau) = X(t) \qquad \text{bzw.} \qquad ||X(t+\tau) - X(t)|| \to 0 \quad \text{für} \quad \tau \to 0$$

Der zufällige Prozess X ist genau dann stetig i.q.M., wenn seine Korrelationsfunktion $s_X(t_1, t_2)$ in gewöhnlichem Sinne stetig ist für alle t_1, t_2.

Beispiel 1: $X(t) = X_1 \cdot \cos \omega_0 t + X_2 \cdot \sin \omega_0 t$.
X_1, X_2 unabhängige ZGen, $E(X_1) = E(X_2) = 0$, $E({X_1}^2) = E({X_2}^2) = \sigma^2$
($\to$ Übungsaufgabe 8.20) $\quad \to s_X(t_1, t_2) = \sigma^2 \cdot \cos \omega_0 (t_2 - t_1)$
s_X ist stetig im gewöhnlichen Sinne $\Rightarrow X(t)$ ist stetig i.q.M.

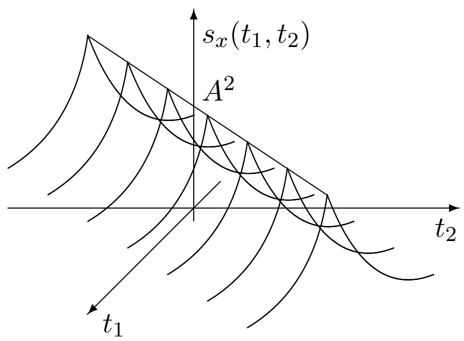
Beispiel 2: Stochastisches Rechtecksignal



$$P\{X(t) = A\} = P\{X(t) = -A\} = \frac{1}{2}$$

Nulldurchgänge seinen Poissonverteilt (k sei der Mittelwert der Nulldurchgänge je Zeiteinheit).

[... lange Rechnung ...] $\quad \Rightarrow \quad s_X(t_1, t_2) = A^2 \cdot e^{-2k|t_2 - t_1|}$



s_x stetig im gewöhnlichen Sinne.
Prozess stetig im quadratischen Mittel, obwohl Realisierungen nicht überall stetig.

10.1.3 Differentiation im quadratischen Mittel

Definition: Der Prozess Y heißt *Ableitung i. q. M.* von X, falls für alle $t \in T$ gilt:

$$\underset{\tau \to 0}{\text{l.i.m.}}\, \frac{X(t+\tau) - X(t)}{\tau} = Y(t)$$

Symbolik: $Y = \frac{dX}{dt} = \dot{X} = \mathring{X}$

Satz: 1. Der zufällige Prozess X ist genau dann differenzierbar i.q.M., wenn

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} s_X(t_1, t_2)$$

existiert für alle $t_1,\ t_2 \in T$.

2. Es gilt

$$s_Y(t_1, t_2) = s_{\dot{X}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} s_X(t_1, t_2)$$

Beispiel 1: (Fortsetzung von 10.1.2)

$X(t) = X_1 \cdot \cos \omega_0 t + X_2 \cdot \sin \omega_0 t, \quad s_X(t_1, t_2) = \sigma^2 \cdot \cos \omega_0 (t_2 - t_1)$

$\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} s_X(t_1, t_2) = \sigma^2 {\omega_0}^2 \cdot \cos \omega (t_2 - t_1)$ existiert für alle t_1, $t_2 \to X$ ist differenzierbar i.q.M.

$$Y(t) = \dot{X}(t) = -\omega_0 X_1 \cdot \sin \omega_0 t + \omega_0 X_2 \cdot \cos \omega_0 t \quad \Rightarrow \quad s_{\dot{X}} = \sigma^2 {\omega_0}^2 \cdot \cos \omega (t_2 - t_1)$$

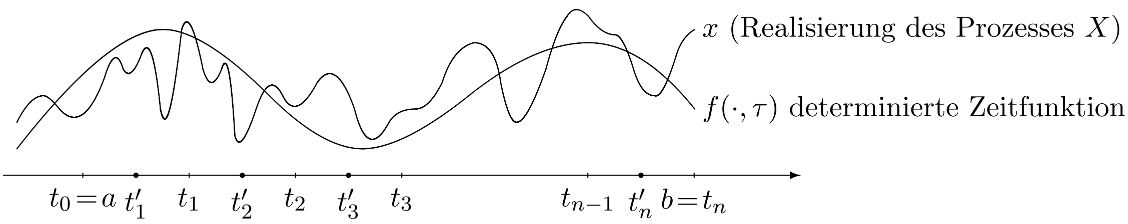
Beispiel 2: Stochastisches Rechtecksignal mit AKF (Fortsetzung)

$t_2 > t_1$	$t_2 < t_1$
$s_X(t_1, t_2) = A^2 \cdot e^{-2k(t_2 - t_1)}$	$s_X(t_1, t_2) = A^2 \cdot e^{-2k(t_1 - t_2)}$
$\dfrac{\partial s_X(t_1, t_2)}{\partial t_1} = 2kA^2 e^{-2k(t_2 - t_1)}$	$\dfrac{\partial s_X(t_1, t_2)}{\partial t_1} = -2kA^2 e^{-2k(t_1 - t_2)}$

Die partielle Ableitung wechselt an der Geraden $t_1 = t_2$ das Vorzeichen $\to \frac{\partial s_X}{\partial t_1}$ unstetig $\Rightarrow X(t)$ nicht differenzierbar i.q.M.

Anmerkung zur Verteilungs- und Dichtefunktion: Berechnung von $F_{\dot{X}}$ bzw. $f_{\dot{X}}$ aus F_X bzw. f_X ist sehr kompliziert. Aber: Ist X ein Gauß-Prozess, ist auch $\dot{X}$ ein Gauß-Prozess.

10.1.4 Integration im quadratischen Mittel



Nach Einteilung von $T' = [a\,b]$ in Teilintervalle mittels $t_0,\ t_1,\ \ldots,\ t_n$ und der Wahl von Zwischenpunkten $t_1',\ t_2',\ \ldots,\ t_n'$ bilden hier die Riemannsche Summe:

$$Y_n(\tau) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k',\ \tau) \cdot X(t_k')(t_k - t_{k-1}) \qquad \text{(Zufallsgröße)}$$

$\Rightarrow$ Folge von Zufallsgrößen $Y_1(\tau),\ Y_2(\tau),\ \ldots,\ Y_n(\tau)$.

Definition: Der Prozess $Y = (Y_\tau)_{\tau \in T}$ heißt *Integral im quadratischen Mittel* von $f(\cdot, \tau) \cdot X$, falls für alle $t \in T$ mit $\text{Max}\,|t_k - t_{k-1}| \to 0$ gilt:

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} Y_n(\tau) = Y(\tau)}$$

Schreibweise für festes τ:

$$\boxed{Y(\tau) = \int_a^b f(t, \tau) X(t)\, dt} \qquad \text{(stochastisches Integral)}$$

Bemerkungen

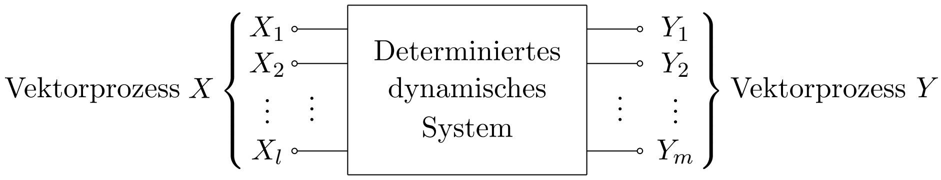
1. Hinreichend für die Integrierbarkeit i.q.M. ist die Stetigkeit i.q.M. des Prozesses X.

2. $E(Y(\tau)) = E\left\{ \underbrace{\int\limits_a^b f(t,\tau)X(t)\,dt}_{\text{stochastisches Integral}} \right\} = \underbrace{\int\limits_a^b f(t,\tau)E\{X(t)\}\,dt}_{\text{gewöhnliches Integral}}$

Anmerkung zur Verteilungs- und Dichtefunktion: Berechnung von F_Y bzw. f_Y aus F_X bzw. f_X ist sehr kompliziert. Aber: Ist X ein Gauß-Prozess, ist auch Y ein Gauß-Prozess.

10.2 Lineare dynamische Systeme

10.2.1 Grundgleichungen



gegeben: F_X, f_C, m_X, s_X, … **gesucht:** F_Y, f_Y, m_Y, s_Y, …

Definitionen

- Menge aller l-dimensionalen Eingabe-Vektorprozesse $X = (X_1, \dots, X_l)$ sei $\mathbb{X}$
- Menge aller m-dimensionalen Ausgabe-Vektorprozesse $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ sei $\mathbb{Y}$
- Menge aller n-dimensionalen Zustandsvektorprozesse $Z = (Z_1, \dots, Z_m)$ sei $\mathbb{Z}$

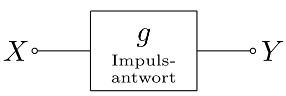
Definition: Eine determinierte Prozessabbildung $\Phi : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, $\Phi(X) = Y$ heißt *dynamisch* (oder *durch ein dynamisches System realisierbar*), falls es einen Zustandsvektorprozess Z und zwei Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n \qquad \text{(Überführungsfunktion)}$$
$$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m \qquad \text{(Ergebnisfunktion)}$$

gibt, so daß Φ dargestellt werden kann durch

allgemein	lineare Systeme
$\dot{Z}(t) = f(Z(t), X(t))$	$\dot{Z}(t) = A \cdot Z(t) + B \cdot X(t)$
$Y(t) = g(Z(t), X(t))$	$Y(t) = C \cdot Z(t) + D \cdot X(t)$

Sonderfall: $l = m = 1$, X sei stationär



$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}, \quad G(s) = C \cdot (sE - A)^{-1} \cdot B + D$$

Dann gilt (analog zu determinierten Signalen):

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t-\tau)X(\tau)\,d\tau \qquad\qquad t-\tau=\tau',\ \tau=t-\tau',\ d\tau\ \ -d\tau'$$

$$= -\int_{\infty}^{0} g(\tau')X(t-\tau')\,d\tau' = \int_{0}^{\infty} g(\tau)X(t-\tau)\,d\tau$$

10.2.2 Mittelwert, Korrelationsfunktion und Leistungsdichtespektrum

(1) **gegeben:** $E(X(t)) = m_X(t) = m_X = \text{const}$ (weil statischer Prozess)
gesucht: $E(Y(t)) = m_Y(t)$

$$m_Y(t) = E(Y(t)) = E\left(\int_0^\infty g(\tau)X(t-\tau)\,d\tau\right) = \int_0^\infty g(\tau)\underbrace{E(X(t-\tau))}_{m_x=\text{const}}\,d\tau$$

$$= \boxed{m_X\int_0^\infty g(\tau)\,d\tau = m_Y} = \text{const}$$

Mit $G(s) = \int\limits_0^\infty g(t)e^{-st}\,dt \quad\Rightarrow\quad G(0) = \int\limits_0^\infty g(t)\cdot e^0\,dt \quad\Rightarrow\quad \boxed{m_y = m_X\cdot G(0)}$

(2) **gegeben:** $s_X(\tau)$, **gesucht:** $s_Y(\tau) = E(Y(t)\cdot Y(t+\tau))$

$$s_Y(\tau) = E\left[\int_0^\infty g(\lambda_1)X(t-\lambda_1)\,d\lambda_1\cdot\int_0^\infty g(\lambda_2)X(t+\tau-\lambda_2)\,d\lambda_2\right]$$

$$= E\left[\int_0^\infty\int_0^\infty g(\lambda_1)g(\lambda_2)X(t-\lambda_1)X(t+\tau-\lambda_2)\,d\lambda_1\,d\lambda_2\right]$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty g(\lambda_1)g(\lambda_2)E\left[X(t-\lambda_1)X(t-\tau-\lambda_2)\right]\,d\lambda_1\,d\lambda_2$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty g(\lambda_1)g(\lambda_2)s_X(\tau+\lambda_1-\lambda_2)\,d\lambda_1\,d\lambda_2$$

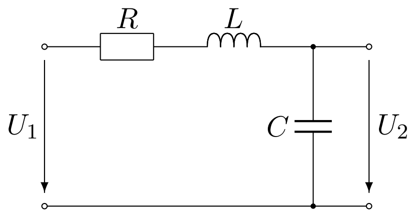
(3) **gegeben:** $S_X(\omega)$, **gesucht:** $S_Y(\omega) = \mathcal{F}\{s_Y(\tau)\}$

$$S_Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_Y(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\infty\int_0^\infty g(\lambda_1)g(\lambda_2)s_X(\underbrace{\tau+\lambda_1-\lambda_2}_{\substack{\tau'=\tau+\lambda_1-\lambda_2\\ \tau=\tau'-\lambda_1+\lambda_2}})\ \overbrace{e^{-j\omega\tau}}^{e^{-j\omega\tau'}e^{j\omega\lambda_2}e^{-j\omega\tau_2}}\ d\lambda_1\,d\lambda_{,}d\tau$$

$$= \underbrace{\int_{-infty}^{\infty} s_X(\tau')e^{-j\omega\tau'}\,d\tau'}_{S_X(\omega)}\cdot\underbrace{\int_0^\infty g(\lambda_1)e^{j\omega\lambda_1}\,d\lambda_1}_{G(-j\omega)=G^*(j\omega)}\cdot\underbrace{\int_0^\infty g(\lambda_2)e^{-j\omega\lambda_2}\,d\lambda_2}_{G(j\omega)}$$

$$\boxed{S_Y(\omega) = S_X(\omega)\cdot G^*(j\omega)\cdot G(j\omega) = S_X(\omega)\cdot\left|G(j\omega)^2\right|}$$

Beispiel

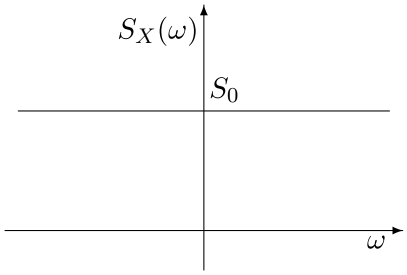


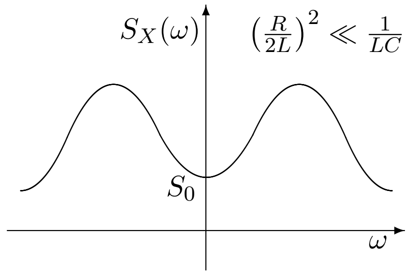
$U_1 \Leftrightarrow X \qquad U_2 \Leftrightarrow Y$

gegeben: $S_X(\omega) = S_0$ (weißes Rauschen)
gesucht: $S_Y(\omega)$

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{s^2LC + sRC + 1}, \quad G(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2LC + j\omega RC}$$

$$|G(j\omega)|^2 = \frac{1}{(1-\omega^2LC)^2 + (\omega RC)^2} \quad \Rightarrow \quad S_Y(\omega) = \frac{S_0}{(1-\omega^2LC)^2 + (\omega RC)^2}$$





10.2.3 Korrelationsfunktion am Systemausgang

Berechnung von $s_Y(\tau)$ nach 10.2.2 (2) ist aufwendig $\Rightarrow$ Alternative über Residuen:

$$s_Y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(\omega) e^{j\omega\tau}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 S_X(\omega) e^{j\omega\tau}\, d\omega \tag{10.1}$$

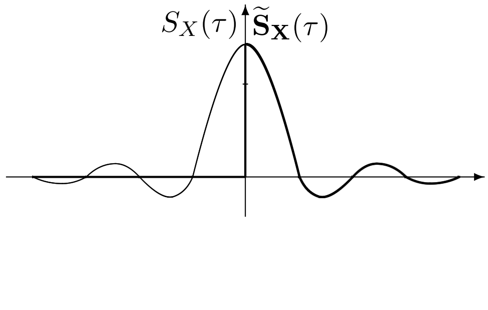
$$|G(j\omega)|^2 = G(j\omega)G(-j\omega) = G(s)G(-s)\Big|_{s=j\omega}$$

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_X(\tau) e^{-j\omega\tau}\, d\tau = \int_{-\infty}^{0} s_X(\tau) e^{-j\omega\tau}\, d\tau + \int_{0}^{\infty} s_X(\tau) e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

$$\overset{*}{=} \underbrace{\int_{0}^{\infty} s_X(\tau) e^{j\omega\tau}\, d\tau}_{\widetilde{S}_X(-s)\big|_{s=j\omega}} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} s_X(\tau) e^{-j\omega\tau}\, d\tau}_{\widetilde{S}_X(s)\big|_{s=j\omega}} \tag{10.2}$$

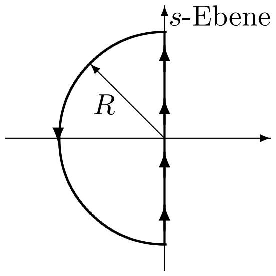
$$* \int_{-\infty}^{0} \underbrace{s_X(\tau) e^{-j\omega\tau}}_{\tau = -\tau'}\, d\tau = -\int_{\infty}^{0} s_X(-\tau') e^{j\omega\tau'}\, d\tau'$$

$$= \int_{0}^{\infty} s_X(\tau) e^{j\omega\tau}\, d\tau$$



Einsetzen von 10.2 in 10.1: $s = j\omega \to ds = dj\omega \Rightarrow d\omega = \frac{ds}{j}$

$$s_Y(\tau) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \underbrace{G(s)G(-s)\left[\widetilde{S}_X(s) + \widetilde{S}_X(-s)\right]}_{F(s)} e^{s\tau}\, ds$$



$$s_Y(\tau) = \frac{1}{2\pi j} \oint F(s)e^{s\tau}\, ds - \underbrace{\frac{1}{2\pi j} \oint F(s)s^{s\tau}\, ds}_{\to 0 \text{ für } R \to \infty} = \sum_{\mathrm{Re}(s)<0} \mathrm{Res}\, F(s)e^{s\tau}$$

$\to$ Ergebnis für $\tau > 0$, $s_Y(\tau)$ für $\tau < 0$ aus Symmetrie

$$\boxed{s_Y(\tau) = \sum_{\mathrm{Re}(s)<0} \mathrm{Res}\left[G(s)G(-s)\left(\widetilde{S}_X(s) + \widetilde{S}_X(-s)\right) e^{s|\tau|}\right]}$$

Beispiel von 10.2.2: (Fortsetzung)
$\left(\frac{2}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$ (2 reelle Pole). Eingangsprozess X habe AKF: $s_X(\tau) = Ae^{-a|\tau|}$, $A, a > 0$.
Es war:

$$G(s) = \frac{1}{s^2LC + sRC + 1} = \frac{1}{LC}\frac{1}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} = \frac{1}{LC}\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)}$$

mit $s_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$
$\widetilde{S}_X(s) = \mathcal{L}\left\{Ae^{-a|\tau|}\right\} = \frac{A}{s+a}$ (laut Tabelle) $\quad \Rightarrow \widetilde{S}_X(s) + \widetilde{S}_X(-s) = \frac{A}{s+a} + \frac{A}{-s+a} = \frac{-2aA}{(s+a)(s-a)}$.

$$\begin{aligned} s_Y(\tau) &= \sum_{\substack{s=s_1\\ s=s_2\\ s=a}} \mathrm{Res}\, \frac{1}{LC}\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)}\frac{1}{LC}\frac{1}{(-s-s_1)(-s-s_2)}\frac{-2aA}{(s+a)(s-a)}e^{s|\tau|} \\ &= \frac{A}{L^2C^2}\left[\frac{e^{-a|\tau|}}{(a^2-{s_1}^2)(a^2-{s_2}^2)} - \frac{2ae^{s_1|\tau|}}{2s_1({s_1}^2-{s_2}^2({s_1}^2-a^2)} - \frac{2ae^{s_2|\tau|}}{2s_2({s_2}^2-{s_1}^2)({s_2}^2-a^2)}\right] \end{aligned}$$

$(s_1,\ s_2 \neq -a)$

Bemerkung: Sonderfall weißes Rauschen: $S_X(\omega) = S_0 \quad \Rightarrow (\widetilde{S}_X(s) + \widetilde{S}_X(-s)) = S_0$

10.2.4 Stationäre Gaußprozesse

Gaußprozess X — $\boxed{\text{lineares dynamisches System}}$ — Gaußprozess Y

X sei stationärer Gaußprozess mit

$$f_X(x_1, t_1; \ldots; x_n, t_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C_X}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x - m_X)C_X^{-1}(x - m_X)^T\right]$$

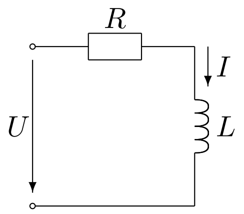
wobei $(x - m_X) = (x_1 - m_X, \ldots, x_n - m_X)$,

$$C_X = \begin{pmatrix} \operatorname{Cov}(X(t_1), X(t_1)) & \cdots & \operatorname{Cov}(X(t_1), X(t_n)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{Cov}(X(t_n), X(t_1)) & \cdots & \operatorname{Cov}(X(t_n), X(t_n)) \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{Cov}(X(t_i), X(t_j)) = s_X(t_j - t_i) - \underbrace{m_X(t_i)m_X(t_j)}_{m_X^2 \text{ da stationär}}$$

Satz: Ist X ein Gaußprozess mit oben angegebener Dichte, dann ist auch Y ein Gaußprozess (f_Y kann aus $s_Y(\tau)$ und m_Y bestimmt werden).

Beispiel:



$U \Leftrightarrow X$
$I \Leftrightarrow Y$

gegeben: X sei statischer Gaußprozess mit $m_X = 0$ und $S_X(\omega) = S_0$ (weißes Rauschen)

gesucht: $f_Y(y,t)$, $f_Y(y_1, t_1;\, y_2, t_2)$

1. $m_Y = ?$ $\quad \to m_Y = m_X \int\limits_0^\infty g(\tau)\, d\tau = m_X G(0) = 0$

2. $s_Y(\tau) = ?$ $\quad \to G(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{1}{R+sL}, \quad G(j\omega) = \frac{1}{R+j\omega L}, \quad |G(j\omega)| = \frac{1}{R^2+(\omega L)^2}$

$$s_Y(\omega) = |G(j\omega)|^2 \cdot s_X(\omega) = \frac{S_0}{R^2+(\omega L)^2}, \qquad \text{Tabelle: } \mathcal{F}\{e^{-a|\tau|}\} = \frac{2a}{\omega^2+a^2},\ a > 0$$

$$= \frac{S_0}{L^{\cancel{2}}} \frac{2\frac{R}{L}}{\omega^2 + (\frac{R}{L})^2} \frac{\cancel{L}}{2R}$$

$$s_Y(\tau) = \frac{S_0}{2RL} e^{-\frac{R}{L}|\tau|}$$

3. $f_Y(y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi {\sigma_Y}^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(y-m_Y)^2}{{\sigma_Y}^2}\right]$, $m_Y = 0$

$${\sigma_Y}^2 = \operatorname{Var}(Y(t)) = E\left[(Y(t)-m_Y)^2\right] = E\left[(Y(t))^2\right] = s_Y(0) = \frac{S_0}{2RL}$$

$$f_Y(y,t) = \frac{1}{\sqrt{\cancel{2}\pi \frac{S_0}{\cancel{2}RL}}} \exp\left(-\frac{1}{\cancel{2}} \frac{y^2}{\frac{S_0}{\cancel{2}RL}}\right) = \sqrt{\frac{RL}{S_0\pi}} \exp\left(-\frac{RL}{S_0} y^2\right)$$

4. $f_Y(y_1, t_1;\, y_2, t_2) = \frac{1}{2\pi \det C_X} \exp\left[-\frac{1}{2} \underbrace{(y-m_Y) X_Y^{-1} (y-m_Y)^T}_{(y_1,y_2)\begin{pmatrix}\cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}}\right]$

$$\operatorname{Cov}(Y(t_1), Y(t_2)) = s_Y(t_2 - t_1) - \underbrace{m_Y^2}_{0} = \frac{S_0}{2RL} e^{-\frac{R}{L}|t_2-t_1|}$$

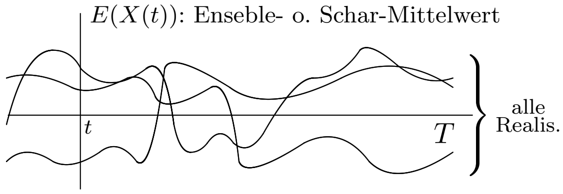
$$C_Y = \begin{pmatrix} \frac{S_0}{2RL} & \frac{S_0}{2RL} e^{-\frac{R}{L}|t_2-t_1|} \\ \frac{S_0}{2RL} e^{-\frac{R}{L}|t_2-t_1|} & \frac{S_0}{2RL} \end{pmatrix}, \quad \det C_Y = \left(\frac{S_0}{2RL}\right)^2 \left(1 - e^{-2\frac{R}{L}|t_2-t_1|}\right)$$

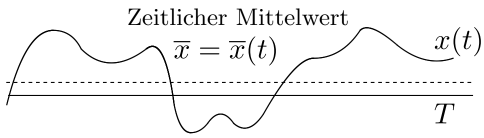
$\vdots$ (einsetzen)

$$f_Y(y_1, t_1;\, y_2, t_2) = \frac{1}{2\pi \frac{S_0}{2RL} \sqrt{1 - e^{-\frac{R}{L}(t_2-t_1)}}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{{y_1}^2 - 2y_1y_2 e^{-\frac{R}{L}|t_2-t_1|} + {y_2}^2}{\frac{S_0}{2RL}\left(1 - e^{-\frac{2R}{L}|t_2-t_1|}\right)}\right]$$

10.3 Anwendungen stationärer Prozesse

10.3.1 Ergodizität





Definition: Ein stationärer Prozess heißt *ergodisch im Mittel*, wenn

$$\overline{x(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} x(t)\,dt = E(X(t))$$

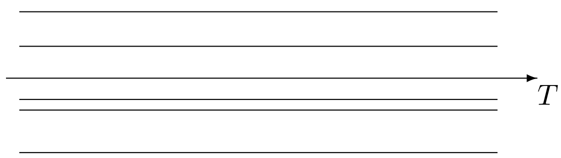
für jede Realisierung x gilt.
Ein statischer Prozess heißt *ergodisch im quadratischen Mittel*, falls

$$\overline{x^2(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} x^2(t)\,dt = E\left(X^2(t)\right)$$

für jede Realisierung x.

Analog: Ergodizität bzgl. der Korrelation usw.

Beispiel für stationären nicht ergodischen Prozess:



Satz: Hinreichend für die Ergozität im Mittel ist

$$\lim_{\tau\to\infty} \operatorname{Cov}(X(t), X(t+\tau)) = 0$$

Bedeutung: Bei ergodischen Prozessen können Messungen am Prozess durch Messungen an einer Realisierung ersetzt werden.

10.3.2 Schätzung von $s_X(\tau)$ bzw. $S_X(\omega)$