Mathematik Brückenkurs an der TUD
Prof. Dr. habil. M. Ludwig
Mitschrift

Fabian Kurz

15. Oktober 2003

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Aussagen und Grundbegriffe der math. Logik

1.1 Aussage

Aussage: Satz, Formulierung, . . . o.ä., die aufgrund ihres Inhaltes entweder wahr oder falsch ist.

$$\underbrace{p}_{\text{Aussage}} \qquad W(p) = \underbrace{\text{Wahrheitswert}}_{w \text{ oder } f}$$

Beispiele:

Aussage	Wahrheitswert
Wir leben im Jahr 2002	f
Dresden liegt an der Elbe	w
$7 < 4$	f
$9 - 2 = 7$	f

1.2 Aussagevariable

Aussagevariable: Satz, Formulierung, . . . o.ä., der eine Variable (Argument) enthält, deren Wahrheitswert erst durch Spezifizierung der enthaltenen Variablen bestimmt werden kann.

Beispiele:

$$p(\text{Name}) \text{ studiert Bauwesen}$$
$$W(p(\text{Jens})) = w \text{ falls Jens Bauwesen studiert}$$
$$W(p(\text{Annette})) = f \text{ falls Annette nur Physik studiert}$$

Weitere Beispiele:

$$p(x) \quad x > 7 \qquad W(p(6)) = f \qquad W(p(23)) = w$$

Weitere Möglichkeiten:

$$p(x) \qquad x > 7 \qquad x : \text{reelle Zahl}$$

Frage: Gilt für alle reellen Zahlen $x > 7$?

$$\forall x : x > 7 \qquad f$$

Gibt es wenigstens eine reelle Zahl mit $x > 7$?

$$\exists\, x : x > 7 \qquad w \text{ z.B. } 23$$

1.3 Aussageverknüpfungen

$p,\ q \rightsquigarrow$ neue Aussage

Schreibweise	Bedeutung	Bezeichnung
$\neg\, p$	nicht p	Negation von p
$p \wedge q$	sowohl p als auch q	Konjunktion
$p \vee q$	p oder q	Disjunktion von p und q
$p \Rightarrow q$	aus p folgt q	Implikation
$p \Leftrightarrow q$	p ist äquivalent zu q	Äquivalenz

$W(p)$	$W(q)$	$\neg\, p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	.	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	.	f	f	w	w

$p \Rightarrow q$ p ist *hinreichend* für q, q ist *notwendig* für p. (Aus p folgt q)

$p \Leftrightarrow q$ p ist *notwendig* und *hinreichend* für q. (p gilt genau dann, wenn q gilt, p gilt dann und nur genau dann, wenn q gilt.)

Beispiel:

$$p(x) \quad x > 7 \qquad q(x) \quad x^2 > 49 \qquad W(p \Rightarrow q) = w \qquad q \not\Rightarrow p \quad \text{z.B. } x = 10$$

Kapitel 2

Mengenlehre

2.1 Begriff einer Menge

- Menge aller 16 Bundesländer {Sachsen, …}
- Liste, Verzeichnis
- Aus einer Grundgesamtheit werden Elemente durch eine bestimmte Eigenschaft (Prädikat) zu einer Menge zusammengefasst
- $\Big\{n \in \mathbb{N}_0 : \underbrace{n = n^2}_{p}\Big\} = \{0,\, 1\},\ \Big\{x \in \mathbb{R} : \underbrace{\exists\, n, m \in \mathbb{N}, x = \frac{n}{m}}_{p}\Big\}$

2.2 Beschreibung

G. Cantor, 1845—1918: Gesamtheit von Objekten wobei pro Objekt vorher entschienden werden kann, ob ein Objekt dieser Gesamtheit angehört oder nicht.

2.3 Bezeichnung

$A, B, C \ldots Z$	Mengen
$a, b, c \ldots z$	Elemente (Objekte), Punkte
M; $x \in M$	Element x gehört zur Menge M
M; $x \notin M$	Element x gehört nicht zur Menge M

Beispiele:

Seien Ω die Grundmenge und p eine Eigenschaft (Prädikat), dann gilt:

$A = \{x \in \Omega : W(p(x)) = w\} = \{x \in \Omega : p(x)\}$

$A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist durch 3 teilbar}\} = \{3, 6, 9 \ldots\}$

2.4 Standardbezeichnungen

Folgende Standardbezeichnungen für Mengen sind gebräuchlich:

Bezeichnung	Bedeutung
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen und 0
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen

Beispiele:

$$\begin{array}{rcl} 2003 & \in & \mathbb{N} \\ 0{,}5 & \notin & \mathbb{Z} \\ 0{,}5 & \in & \mathbb{Q} \\ \sqrt{2} & \notin & \mathbb{Q} \\ \sqrt{2} & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

2.5 Teilmenge

A, B A ist eine Teilmenge von B: jedes Element von A ist Element von B

$$x \in A \longrightarrow x \in B \qquad A \subset B$$

2.6 Mengengleichheit

A, B $\quad A = B$ bedeutet $\quad A \subset B \wedge B \subset A$

Beispiel:

$$A = \left\{\tfrac{4}{8}, \tfrac{38}{57}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{9}{18}, \tfrac{3}{6}\right\} \qquad B = \left\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}\right\} \qquad C = \left\{\tfrac{2}{3}\right\}$$

$$C \subset A, \qquad C \subset B, \qquad (A \subset B) \wedge (B \subset A) \Rightarrow A = B$$

Kapitel 3

Mengenoperationen

$A, B \rightsquigarrow$ neue Mengen

- Vereinigung von A und B ($A \cup B$) besteht aus allen Elementen von A und aus allen Elementen von B.
- Durchschnitt von A und B ($A \cap B$) besteht aus allen Elementen, die sowohl der Menge A als auch B angehören.

Beispiel:

Menge	Beschreibung
S	Menge aller Studienanfänger der TUD im Jahre 2003
B	Menge aller Studienbewerber der TUD im Jahre 2003
A	Menge aller Studienanfänger, die ein Abitur haben
Z	Menge aller Studienanfänger mit Zulassungsprüfung
M	Menge aller Studienanfänger die den Brückenkurs besuchen

Es gilt z.B.:
$S \subset B \qquad A \cup Z \cup M = S \qquad B \ni N, I \qquad B = I \cup N \qquad I \cap N = \emptyset$

A, B heißen *disjunkt*, wenn der Durchschnitt leer ist ($A \cap B = \emptyset$). Die Differenz von A und B, $A \setminus B$ ist die Menge aller der Elemente von A, die nicht in B liegen.

3.1 Komplement

$A = \Omega$.

Das Komplement von A in Ω: Alle Elemente aus Ω, die *nicht* zu A gehören. $\Omega \setminus A = A^c$.

$A^c = \{x \in \Omega : x \notin A\} \qquad A^c \in \Omega$
$(A^c)^c = \{x \in \Omega : x \notin A^c\} = A$

Beispiel:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$A = \{\text{gerade}\} = \{2, 4, 6\}$
$B = \{\text{ungerade}\} = \{1, 3, 5\}$

Es gilt:
$A^c = B \qquad B^c = A \qquad A \cup B = \Omega$
$(A^c)^c = A \qquad A \cap B = \emptyset$

3.2 Geordnete Paare, kartesisches Produkt

A, B. (a, b) ist ein geordnetes Paar, wenn $a \in A$ und $b \in B$; $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$. Die Gesamtheit aller geordneten Paare bezeichnet man als *kartesisches Produkt*, $A \times B$:

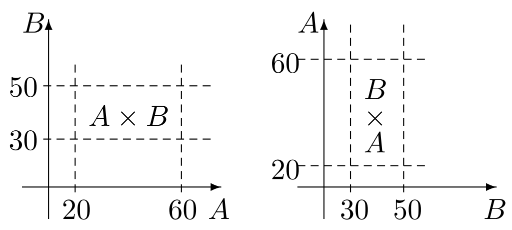
$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

$A \times B$: Produktmenge von A und B. Analog wird die Menge $B \times A$ definiert:

$$B \times A = \{(a, b) : a \in B, b \in A\}$$

Anschauliche Darstellung

$A = [20, 60] \qquad B = [30, 50]$



$$A \times B \neq B \times A$$

$(a, b) = (a', b') \qquad a, a' \in A \quad b, b' \in B$
genau dann, wenn $a = a'$ und $b = b'$

NB: (a, b) geordnetes Paar $\neq \{a, b\}$ zweipunktige Menge

Beispiel:

1. Sämtliche digitalen Zeitangaben
$S = \{n \in \mathbb{N}_0 : n \leqq 23\}$
$M = \{m \in \mathbb{N}_0 : n \leqq 59\}$

$S \times M = \{(n, m) : n \in S, m \in M\}$

Kapitel 4

Abbildungen

Jedem Dresdener Bewohner wird seine Adresse zugeordnet:

$X \xrightarrow{f} Y \qquad \forall x \in X$ wird exakt ein $y \in Y$ zugeordnet.
X : alle Einwohner Dresdens
Y : alle Adressen Dresdens

Man bezeichnet $X \xrightarrow{f} Y$ als *Abbildung*.

x : Definitionsbereich
f : Abbildungsvorschrift
Y : Bildbereich

$X \ni x \Rightarrow f(x) \in Y$ (Bild von x)

$Y \longrightarrow y \qquad \{x \in X : f(x) = y\} = f^{-1}(y)$ (Urbild von y).

Beispiel:

B : Alle Adressen einer Straße $\Rightarrow f^{-1}(B)$: Alle Einwohner der Straße.

$Y \supset B \qquad \{x \in X : f(x) \in B\} = f^{-1}(B)$ (Urbild der Menge B).

NB:

X : Menge aller Autobesitzer
Y : Menge aller Autos

$X \longrightarrow Y$ ist *keine* Abbildung, da nicht eindeutig, d.h. einem Autobesitzer können mehrere Autos zugeordnet werden.

Wenn bei einer Abbildung Y eine Teilmenge von Zahlen ist, nennt man die Abbildung eine *Funktion*.

4.1 Klassifizierung von Abbildungen

$f : X \longrightarrow Y$

4.1.1 Injektiv

f : *Injektiv* (eindeutig, *one-to-one*, 1–1), wenn die folgende Aussage gilt, d.h. wahr ist:

$x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Diese Aussage is äquivalent zu:

$x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Beweis:
$x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2)$.
Annahme: $x_1 \neq x_2$, dann muß nach Voraussetzung $f(x_1) \neq f(x_2)$ gelten. $\lightning$

4.1.2 Surjektiv

f : *Surjektiv* (Abb. "auf", onto), wenn $\forall y \in Y$ wenigstens ein $x \in X$ mit $y = f(x)$ existiert (d.h. Y wird durch Bilder bzgl. der Abbildung f vollständig ausgeschöpft!).

Beispiel:
X : Menge aller Studenten in Dresden
Y : Menge aller Zimmer in Dresden, in denen ein Student wohnt.
$\widetilde{Y}$: Menge aller Zimmer in Dresden, in denen junge Leute wohnen.

$\underbrace{X \longrightarrow Y}_{\text{surjektiv}} \qquad \underbrace{X \longrightarrow \widetilde{Y}}_{\text{nicht surjektiv}}$

4.1.3 Bijektiv

f : *Bijektiv* oder invertierbar, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

4.2 Inverse Abbildung

$f : X \longrightarrow Y$ (bijektiv)

$Y \ni y \overset{\text{surj.}}{\rightsquigarrow} \exists\, x \in X$ mit $y = f(x)$

Wie viele solcher x gibt es? Genau *ein* solches x!
$\square$ Seien $x_1, x_2 \in X$ so, daß $f(x_1) = y = f(x_2) \overset{\text{inj.}}{\rightsquigarrow} x_1 = x_2 \blacksquare$

$\Rightarrow g : Y \longrightarrow X \quad g(y) = x$ so daß $y = f(x)$ gilt.
g heißt die *inverse Abbildung* zu $f = f^{-1} = g$

4.3 Graph einer Abbildung

$f : X \longrightarrow Y$

$$\Gamma_f = \{(x, y) : x \in X, y = f(x) \in Y\} \subset X \times Y$$

Beispiele:

$$X = \{0, 1, -1, -2, 2, 3\} \quad f(x) = x^2 \quad \Rightarrow Y = \{0, 1, 4, 9\}$$

Surjektiv, aber nicht injektiv, $\nexists f^{-1}$, da z.B. $y = 1$ nicht eindeutig $x = 1$ oder $x = -1$ zugeordnet werden kann.

$$\Gamma_f = \{(0, 0), (1, 1), (-1, 1), (-2, 4), (2, 4), (3, 9)\}$$

Kapitel 5

Reelle Zahlen, Ungleichungen

$\mathbb{Q}$ Rationale Zahlen, bekannt aus der Schule.

- $\mathbb{Q} \ni r \quad \exists m, n \in \mathbb{Z} : r = \frac{n}{m}$
- Rechenregeln unter den rationalen Zahlen: $+, \cdot$
- Weitere Eigenschaften [...]
- Defekte: Diagonale im Einheitsquadrat, Kreisumfang können nicht mittels rationaler Zahlen gemessen werden.

$\rightsquigarrow \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{irrationale Zahlen}\} \quad \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Für den neuen Zahlenbereich wird als neue Multiplikation $\boxtimes$ und Addition $\boxplus$ eingeführt.

In $\mathbb{Q}$	In $\mathbb{R}$
$r, s \in \mathbb{Q}$	$r, s \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
$r + s = t \in \mathbb{Q}$	$r \boxplus = t$
$r \cdot s = u \in \mathbb{Q}$	$r \boxtimes s = u$

Natürlichkeit von $\boxtimes$ und $\boxplus$

5.1 Axiomensystem

Gleiche Gesetze wie für $\mathbb{Q}$

Addition: $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$

Multiplikation: $x_1 x_2 x_3 \ldots x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i$

Ordnungsaxiome

$\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ entweder $x < y$ oder $x > y$ oder $x = y$.

$x > y \quad y > z \Rightarrow x > z$

$\left.\begin{matrix} x > y \\ \lambda > 0 \end{matrix}\right\} \lambda x > \lambda y$

$x > y \Rightarrow x + z > y + z \forall z \in \mathbb{R}$

Vollständigkeitsaxiom

Darstellung aller reellen Zahlen.

5.2 Intervalle

$a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{lcll}
[a,b] & = & \{x \in R : a \le x \le b\} & \text{abgeschlossen} \\
(a,b) & = & \{x \in R : a < x < b\} & \text{offen} \\
[a,b) & = & \{x \in R : a \le x < b\} & \text{halboffen} \\
(a,b] & = & \{x \in R : a < x \le b\} & \text{halboffen}
\end{array}$$

5.3 Ungleichungen

$$\begin{tikzcd}
 & a \le b \arrow[dl, "+"'] \arrow[dr, "*"] & & \\
\begin{matrix}\forall\, x \in \mathbb{R} \\ a + x \le b + x\end{matrix} & & x \in \mathbb{R} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
 & \begin{matrix} x > 0 \\ ax \le bx \end{matrix} & \begin{matrix} x < 0 \\ ax \ge bx \end{matrix} & \begin{matrix} x = 0 \\ 0 = 0 \end{matrix}
\end{tikzcd}$$

Beispiel:

Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, die der Ungleichung $\frac{x}{x+1} \le \frac{1}{2}$ genügen $(x \neq -1)$.

Fallunterscheidung:

- $x + 1 > 0 \rightsquigarrow x \le \frac{1}{2}(x+1)$
- $x + 1 < 0 \rightsquigarrow x \ge \frac{1}{2}(x+1)$

$\mathbb{L} = \{-1, 1\}$

5.4 Betragsfunktion

$|\,\mathbf{.}\,| : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty]$

$$x = \begin{cases} x & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

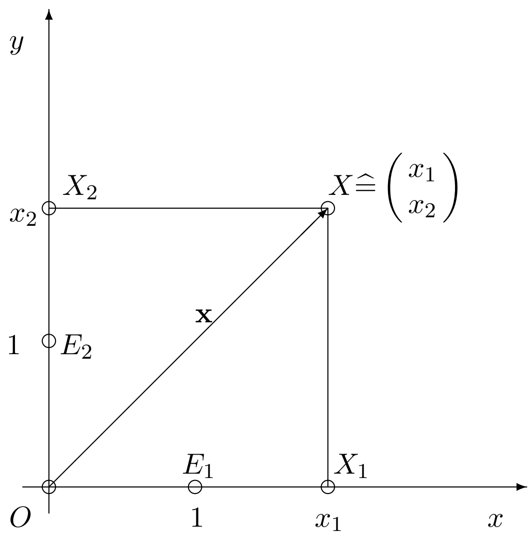
Eigenschaften: $x, y \in \mathbb{R}$

$$|x| \geq 0 \qquad -|x| \leq x \leq |x| \qquad |x| = |-x|$$

$$|xy| = |x|\,|y| \qquad |x+y| \leq |x| + |y| \qquad \text{(Dreiecksgleichung)}$$

Kapitel 6

Das kartesische Koordinatensystem



$\mathrm{KS}(O; x_1, x_2)$

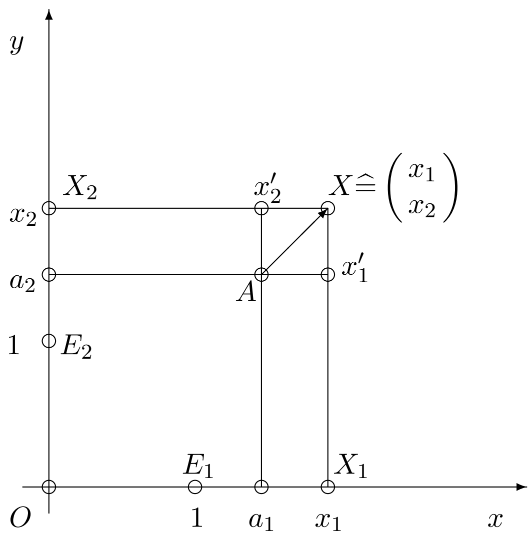
$X \in E^2 \leftrightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_{1,2} \in \mathbb{R} \right\}$

X : Punkt
E^2 : Ebene
$\mathbf{x}$: Koordinatenvektor
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$: $x_1 =$ Abszisse, $x_2 =$ Ordinate

6.1 Koordinatentransformation

KS($O; x_1, x_2$) mit Nullpunkt O

KS($A; x_1', x_2'$) mit Nullpunkt $A(a_1, a_2)$



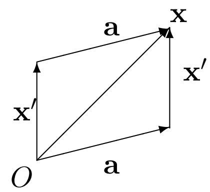
$$\begin{array}{lcl} x_1 = a_1 + x_1' & & x_1' = x_1 - a_1 \\ & \text{bzw.} & \\ x_2 = a_2 + x_2' & & x_2' = x_2 - a_2 \end{array}$$

In Vektorschreibweise

$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{x}'$
bzw.
$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{a}$
Wobei für die Addition von Zahlen-2-Tupeln, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \end{pmatrix}$$

Graphische Darstellung der Addition, anschaulicher Beweis für das Kommutativgesetz bei der Addition von Vektoren:



Die Multiplikation geschieht analog koordinatenweise:

$$r\mathbf{a} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \end{pmatrix}$$

6.2 Abstand zweier Punkte nach Pythagoras

Der Abstand der Punkte A und X kann mit dem Satz des Pythagoras ermittlet werden:

$$\overline{AX} = \sqrt{{x'_1}^2 + {x'_2}^2} = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}$$

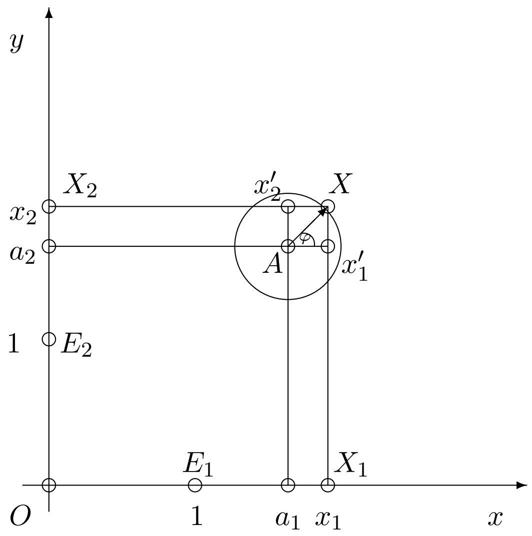
6.3 Norm (Länge) eines Vektors

Norm (Länge) von $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$

$$\|x\| := \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2} = \overline{OX}$$

Kapitel 7

Das Polarkoordinatensystem



PKS(A, a) A: Pol a : Polarachse ($\parallel$ x-Achse)

Punkt $X(\neq A) \leftrightarrow$ Polarkoordinate (r, φ)
Abstand r $:= \overline{AX}$
Polarwinkel $\varphi := \measuredangle(a, AX)$

Dann gilt:

$x_1' = r\cos\varphi$	bzw. mit der Koordinaten- Transformation	$x_1 = a_1 + r\cos\varphi$
$x_2' = r\sin\varphi$		$x_2 = a_2 + r\sin\varphi$

d.h. in vektorieller Schreibweise

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

7.1 Kreisgleichung und Parameterdarstellung

Kreis $k(A, r)$ Radius x, Mittelpunkt A

Definition als Menge:

$k(A, r) = \{x : \overline{AX} = |\mathbf{x} - \mathbf{a}| = r\}$ A: fest, r: const ¿ 0

Die allgemeine Kreisgleichung lautet:

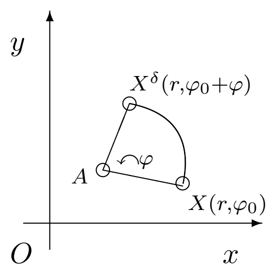
$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r \Leftrightarrow (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = r^2$

Parameterdarstellung:

$$k(A, r) : x = x(\varphi) = a + r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \varphi = [0, 2\pi)$$

7.2 Drehungen

Drehpunkt $A(a_1, a_2)$ Drehwinkel φ



Punkt X wird auf einem Kreis $k(A, \overline{AX})$ zu dem Bildpunkt X^δ bewegt.

Vektorformel für die Drehung δ, mit $r = \overline{AX}, (r, \varphi_0)$ bzw. $(r, \varphi_0 + \varphi)$ sind Polarkoordinaten von X bzw. X^δ bezüglich PKS(A, x_1').

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\mathbf{x}^\delta = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos(\varphi_0 + \varphi) \\ \sin(\varphi_0 + \varphi) \end{pmatrix}$$

Aufgrund der Additionstheoreme gilt daher:

$$x^\varphi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi_0\cos\varphi + r\sin\varphi_0\sin\varphi \\ r\sin\varphi_0\cos\varphi + r\cos\varphi_0\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Wegen $x_1 - a_1 = r\cos\varphi_0$ und $x_2 - a_2 = r\sin\varphi_0$ folgt:

$$\mathbf{x}^\delta = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (x_1 - a_1)\cos\varphi - (x_2 - a_2)\sin\varphi \\ (x_1 - a_1)\sin\varphi - (x_2 - a_2)\cos\varphi \end{pmatrix}$$

7.2.1 Additionstheoreme

$\cos(\varphi_0 + \varphi) = \cos\varphi_0 \cos\varphi - \sin\varphi_0 \sin\varphi$
$\sin(\varphi_0 + \varphi) = \sin\varphi \cos\varphi + \cos\varphi_0 \sin\varphi_0$

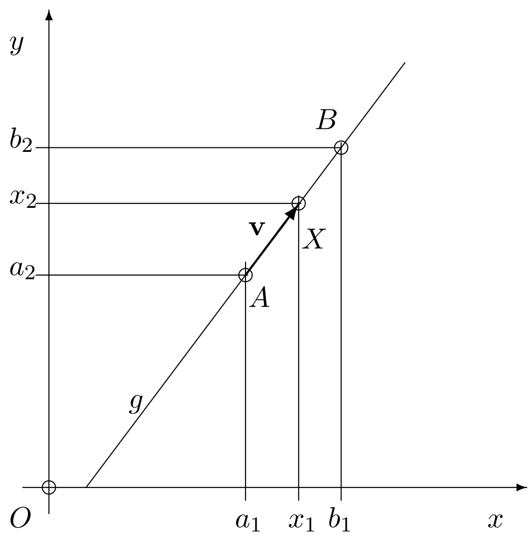
7.3 Parameterdarstellung der Gerade

Parameterdarstellung der Gerade $g_{A,v}$.

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + r\mathbf{v} \qquad -\infty < r < \infty$$

$\mathbf{a}$: *Ortsvektor* $\qquad$ $\mathbf{v}$: *Richtungsvektor*

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$



φ: Anstiegswinkel von $g_{A,v}$ gegenüber der x-Achse ($\varphi \neq \pm\frac{\pi}{2}$).

$m := \tan\varphi = \frac{\mathbf{v_2}}{\mathbf{v_1}} = \frac{x_2 - a_2}{x_1 - a_1}$
m : Anstieg

Mit $r_B \neq 0$ folgt der Punkt $B : b = \mathbf{a} + r_B\mathbf{v}$ auf $g_{A,v}$.
Dann gilt:

$m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$

somit

$\frac{x_2-a_2}{x_1-a_1} = \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}$

also: $(b_2 - a_2)(x_1 - a_1) - (b_1 - a_1)(x_x - a_x) = 0$
(Zwei-Punkte-Gleichung für die Gerade $g_{A,v}$).

7.4 Skalarmultiplikation

Für die Multiplikation zweier Vektoren wird die Skalarmultiplikation eingeführt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$